KEJADIAN YANG SALING MEMPENGARUHI

Modul 6. Pengantar Statistik

Dr. Ir. Prima Kristalina, MT

Maret 2020

OUTLINE

1. Probabilitas Kejadian Majemuk
2. Kejadian saling mempengaruhi:
   - Kejadian Saling Lepas (Mutually Exclussive)
   - Kejadian Saling Bebas (Statistically Independent)
3. Saling Pengaruh dengan Syarat
   - Probabilitas Bersyarat
   - Probabilitas Tidak Bersyarat
4. Kemunculan Dua atau Lebih Kejadian
   - Probabilitas Gabungan
   - Probabilitas Marginal
5. Teorema Bayes
6. Latihan Soal
7. Tugas

PROBABILITAS KEJADIAN MAJEMUK (1/2)

- Bila A dan B kejadian sembarang pada ruang sampel S, maka probabilitas gabungan kejadian A dan B adalah kumpulan semua titik sampel yang ada pada A atau B atau pada keduanya.
- **Probabilitas gabungan** kejadian A dan B dinyatakan sebagai:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

PROBABILITAS KEJADIAN MAJEMUK (2/2)

- Bila A, B dan C kejadian sembarang pada ruang sampel S, maka probabilitas gabungan kejadian A,B dan C adalah kumpulan semua titik sampel yang ada pada A atau B atau C atau pada keduanya.
- Dinyatakan sebagai:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Atau:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=3}^{n} P(A_i A_j A_k)$$

- Contoh:
- Kemungkinan bahwa Arif lulus ujian Statistik adalah 2/3 dan kemungkinan ia lulus Bahasa Inggris adalah 4/9. Bila probabilitas lulus keduanya adalah 1/4, berapakah probabilitas Arif dapat paling tidak lulus salah satu dari kedua mata kuliah tersebut?

- Jawab:

diketahui $P(S)=\frac{2}{3}$ $P(B)=\frac{4}{9}$ $P(S\cap B)=\frac{1}{4}$

Probabilitas lulus salah satu dari kedua mata kuliah berarti lulus Statistik **atau** lulus Bhs. Inggris:

$$P(S\cup B)=P(S)+P(B)-P(S\cap B)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{31}{36}$$

KEJADIAN YANG SALING MEMPENGARUHI

- Pada kejadian majemuk, ada kalanya dua atau lebih kejadian tersebut bisa saling mempengaruhi atau tidak saling mempengaruhi.
- Berdasarkan kondisi saling mempengaruhi, ada 2 jenis kejadian:
  a. Dua atau lebih kejadian tersebut saling lepas (*Mutually Exclusive*)
  b. Dua atau lebih kejadian tersebut saling bebas (*Statistical Independent*)

KEJADIAN SALING LEPAS (1/2)

- Kejadian **Saling lepas (Disjoint Event / Mutually Exclusive)** ialah dua insiden yang tidak saling mempengaruhi satu sama lainnya.
- Kedua kejadian tersebut tidak mungkin terjadi dalam waktu bersamaan, dan dalam antrian waktu kejadian, keduanya tidak saling mempengaruhi
- Contoh: makan dan tidur , muka dan belakang coin
  - Kejadian makan dan tidur tidak bisa terjadi dalam waktu bersamaan, dan secara berurutanpun keduanya tidak saling mempengaruhi
  - Jika saat coin dilempar muncul gambar Muka, maka pada saat yang sama gambar Belakang tidak muncul

Biasanya antara pernyataan kejadian pertama dan pernyataan kejadian ke-dua dinyatakan dengan kata hubung **ATAU**

KEJADIAN SALING LEPAS (2/2)

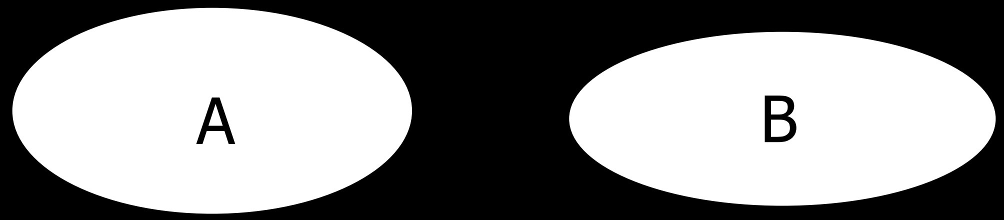
- Probabilitas kejadian saling lepas untuk kejadian A dan B dinyatakan dalam bentuk:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

→ Probabilitas Gabungan, dengan: $P(A \cap B) = \varnothing$

- Probabilitas kejadian saling lepas untuk kejadian A, B dan C dinyatakan dalam bentuk:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- **Contoh:**

Tiga mesin cuci di sebuah laundry dijalankan bersama-sama. Jika W adalah kejadian dimana paling sedikit ada 2 mesin Rusak, Q menyatakan kejadian semua mesin Tidak Rusak dan T menyatakan mesin ke-2 Rusak. Kejadian-kejadian mana yang Saling Lepas?

- **Jawab:**

Jika S adalah himpunan Semesta dari seluruh kombinasi kejadian pada 3 mesin, maka:

S = {RRR, RRB, RBR, RBB, BRR, BRB, BBR, BBB} = 8

W =kejadian paling sedikit ada 2 mesin Rusak → W = {RRR, RRB, RBR, BRR} = 4, P(W)=4/8

Q = kejadian semua mesin tidak Rusak. → Q = {BBB}=1 → P(Q) = 1/8

T = kejadian mesin ke 2 Rusak → T = {RRR, RRB, BRR, BRB} = 4 → P(T)=4/8

$$P(W \cap Q) = \varnothing$$

$$P(W \cup Q) = \{RRR, RRB, RBR, BRR, BBB\} = \frac{5}{8}$$

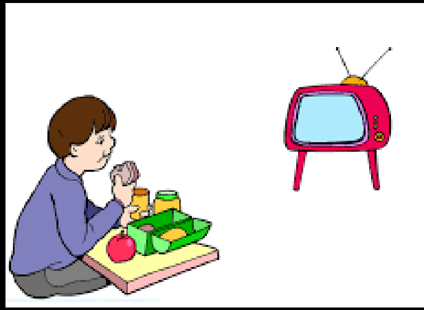
$$P(W) + P(Q) = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \quad \rightarrow \quad P(W \cup Q) = P(W) + P(Q)$$

W dan Q saling lepas

Probabilitas paling sedikit 2 mesin rusak **atau** semua mesin tidak rusak adalah 5/8

KEJADIAN SALING BEBAS (1/2)

- Kejadian **Saling Bebas (Statistically Independent)** adalah dua kejadian dimana ada hubungan antara kejadian pertama dan kedua.
- Dua kejadian ini saling independen satu sama lain, artinya kemunculan kejadian A tidak mempengaruhi terjadinya kejadian B dan sebaliknya
- Kejadian-kejadian ini bisa terjadi dalam waktu bersamaan.
- Contoh: menonton TV dan makan, dengar musik sambil chatting
  - Manusia bisa melakukan kegiatan makan sambil menonton TV
  - Mahasiswa dengar musik pakai headset sambil chatting dengan WA



Biasanya antara pernyataan kejadian pertama dan pernyataan kejadian ke-dua dinyatakan dengan kata hubung **DAN**

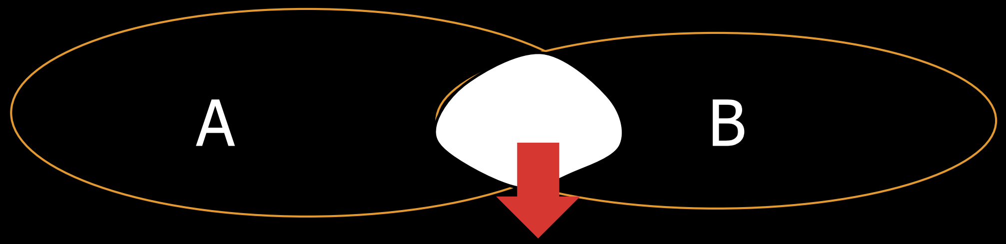
KEJADIAN SALING BEBAS (2/2)

- Probabilitas kejadian saling bebas untuk kejadian A dan B dinyatakan dalam bentuk:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

- Probabilitas kejadian saling bebas untuk kejadian A, B dan C dinyatakan dalam bentuk:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$



$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

- **Contoh:**

  Dilakukan pengamatan pada 3 ibu-ibu yang sedang mencuci. Jika mencuci dengan sabun dinyatakan sebagai A, dan mencuci dengan deterjen dinyatakan sebagai D. Diketahui N adalah kejadian dimana ibu I menggunakan deterjen, M adalah kejadian ibu II pakai deterjen dan Q adalah ibu III pakai deterjen. Tunjukkan adanya kejadian saling bebas antar mereka.

- **Jawab:**

S = {*AAA, AAD, ADA, ADD, DAA, DAD, DDA, DDD*} = 8

N = {*DAA,DAD,DDA,DDD*} = 4, P(N)=4/8=1/2

M= {*ADA, ADD, DDA, DDD*}=4 → P(M) = 4/8=1/2

Q= {*AAD, ADD, DAD, DDD*} = 4 → P(Q)=4/8=1/2

$$P(N \cap M \cap Q) = \{DDD\} = \frac{1}{8},$$

$$P(N).P(M).P(Q) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Probabilitas ibu I **dan** ibu II **dan** ibu III pakai detergen adalah 1/8

$$P(N \cap M \cap Q) = P(N).P(M).P(Q)$$

Saling bebas

SALING PENGARUH DENGAN SYARAT

- Berdasarkan besarnya pengaruh dari satu kejadian terhadap kejadian yang lain, pembahasan probabilitas dibedakan menjadi:
  1. Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)
     - Kemunculan sebuah kejadian tergantung dari kejadian lain yang telah muncul sebelumnya
  2. Probabilitas Tidak Bersyarat (*Unconditional Probability)*
     - Kemunculan sebuah kejadian tidak harus tergantung pada kejadian lain yang muncul sebelumnya (masing-masing kejadian bisa berdiri sendiri/independen)

PROBABILITAS TIDAK BERSYARAT (UNCONDITIONAL PROBABILITY)

- Sebuah kejadian bisa muncul pada ruang sampel dengan karakteristik tertentu, dimana setiap karakter memiliki kesempatan untuk dipilih
- Probabilitas ini bisa didapatkan dari **probabilitas gabungan** dimana kedua kejadian saling bebas *(statistical inpendent)*.

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Di sini kejadian A dan kejadian B dapat berjalan dalam waktu bersamaan.

PROBABILITAS BERSYARAT (CONDITIONAL PROBABILITY)

- Probabilitas terjadinya peristiwa A bila peristiwa B terjadi lebih dulu, dinyatakan sebagai:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ \ P(B)>0$$

$P(B)=$ probabilitas terjadinya peristiwa B

$P(A\cap B)=$ probabilitas terjadinya peristiwa A dan B secara bersamaan

$P(A|B)=$ probabilitas terjadinya peristiwa A dengan syarat peristiwa B terjadi lebih dulu

- Probabilitas terjadinya peristiwa B bila peristiwa A terjadi lebih dulu, dinyatakan sebagai:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)},\ \ P(A)>0$$

- **Contoh:**
- Distribusi anak laki-laki dan perempuan berdasarkan usia di sebuah sekolah diberikan pada tabel berikut:

	UMUR						
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**TOTAL**
Laki-laki	400	329	521	410	430	360	2450
Perempuan	300	510	425	521	370	500	2626
TOTAL	700	839	946	931	800	860	5076

- Hitung:
  1. Probabilitas pengambilan acak seorang anak laki-laki
  2. Probabilitas pengambilan acak seorang anak laki-laki yang berusia 5 tahun
  3. Probabilitas pengambilan acak seorang anak (baik laki-laki maupun perempuan) dengan usia paling sedikit 8 tahun

- Jawab:
  1. Probabilitas seorang anak laki-laki:

$$P(laki-laki) = \frac{2450}{5076} = 0,483$$

  2. Probabilitas seorang anak laki-laki yang berusia 5 tahun

$$P(laki-laki \cap 5) = \frac{400}{5076} = 0,079$$

  3. Probabilitas seorang anak paling sedikit usia 8 tahun

$$P(U \geq 8) = P(U = 8) + P(U = 9) + P(U = 10)$$
$$= \frac{931}{5076} + \frac{800}{5076} + \frac{860}{5076} = \frac{2591}{5076} = 0,51$$

- Dari contoh sebelumnya, hitunglah:

  1. Probabilitas anak umur 9 tahun dari kelompok anak perempuan
  2. Probabilitas anak perempuan yang berumur 9 tahun
  3. Probabilitas anak laki-laki dari kelompok umur 8 tahun
  4. Probabilitas anak berumur paling tinggi 7 tahun dari kelompok anak laki-laki

Jawab:

1. Probabilitas anak umur 9 tahun dari kelompok anak perempuan

$$P(9 \mid perempuan) = \frac{370}{2626} = 0{,}14$$

2. Probabilitas anak perempuan yang berumur 9 tahun

$$P(perempuan \cap 9) = \frac{370}{5076} = 0{,}073$$

3. Probabilitas anak laki-laki dari kelompok umur 8 tahun

$$P(laki-laki \mid 8) = \frac{410}{931} = 0{,}44$$

4. Probabilitas anak berumur paling tinggi 7 tahun dari kelompok anak laki-laki

$$P(U \leq 7 \mid laki-laki) = \frac{400}{2450} + \frac{329}{2450} + \frac{521}{2450} = \frac{1250}{2450} = 0{,}51$$

- **Contoh:**
  - Populasi sarjana di suatu kota dibagi menurut jenis kelamin dan status pekerjaan sbb:

	Bekerja	Menganggur	Jumlah
Laki-laki	300	40	340
Wanita	100	200	300
Jumlah	400	240	640

  - Misalkan diambil salah satu dari mereka untuk mempromosikan produk di kota tsb, dan orang tsb ternyata telah bekerja. Berapa probabilitasnya bahwa dia laki-laki, dan bahwa dia perempuan ?

Implementasi probabilitas bersyarat

$$A = \text{kejadian terpilih sarjana bekerja, } P(A) = \frac{400}{640}$$

$$n(A \cap B) = \text{sarjana bekerja yang laki-laki=300, } P(A \cap B) = \frac{300}{640}$$

$$P(B \mid A) = \text{sarjana laki-laki dari kelompok bekerja}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{300/640}{400/640} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \Rightarrow \text{ sarjana laki-laki dari kelompok bekerja}$$

$$\text{Kejadian bahwa dia wanita: } \mathrm{P}(B \mid A) = \frac{100/640}{400/640} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \Rightarrow \text{ sarjana wanita dari kelompok bekerja}$$

KEMUNCULAN DUA ATAU LEBIH KEJADIAN

- Berdasarkan kebersamaan kemunculan dan pengaruhnya satu dengan yang lain, pembahasan probabilitas dibedakan menjadi 2 macam:
    1. Probabilitas Gabungan (*Joint Probability*)

        Probabilitas dua atau lebih kejadian muncul dalam waktu bersamaan (secara bersama-sama)
    2. Probabilitas Marginal (*Disjoint Probability*)

        Probabilitas kemunculan sebuah kejadian

PROBABILITAS GABUNGAN (JOINT PROBABILITY) (1/3)

- Probabilitas Gabungan adalah probabilitas dimana dua kejadian muncul dalam waktu bersamaan (secara bersama-sama)
- Probabilitas ini juga bisa didapatkan dengan mengalikan probabilitas bersyarat dengan probabilitas sebuah peristiwa yang terlibat dalam persyaratan tersebut.

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$
$$= P(B|A).P(A), \text{ dimana } P(A), P(B) > 0$$

PROBABILITAS GABUNGAN (JOINT PROBABILITY) (2/3)

- Probabilitas Gabungan juga dinamakan probabilitas interseksi karena merupakan irisan dari probabilitas kejadian A dan B.

$$P(C) = P(B \cap A) = P(A \cap B)$$

PROBABILITAS GABUNGAN (JOINT PROBABILITY) (3/3)

- Probabilitas Gabungan dikatakan independen secara statistik (*statistic independent*) , jika memenuhi syarat: $(A \cap B) = \varnothing$
- Artinya bahwa terjadinya peristiwa A tidak dipengaruhi oleh peristiwa B, dan sebaliknya.
- Dimana $P(A|B) = P(A)$ dan $P(B|A) = P(B)$
- Sehingga probabilitas gabungan untuk A dan B adalah saling independen :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

PROBABILITAS MARGINAL (DISJOINT PROBABILITY) (1/3)

- Probabilitas munculnya sebuah kejadian terhadap beberapa kejadian lainnya.
- Probabilitas sebuah kejadian sembarang, *B* apabila ada beberapa peristiwa yang terjadi lebih dulu A_1, A_2, ..,A_n dan masing-masing peristiwa tersebut adalah **saling lepas** (*mutually exclusive*), dinyatakan sebagai:

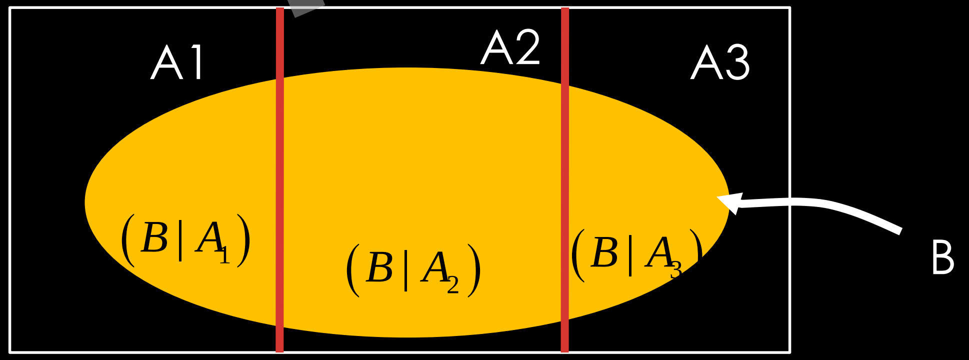
$$P(B) = P(B|A_1).P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + \ldots + P(B|A_n).P(A_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j).P(A_j)$$

PROBABILITAS MARGINAL (DISJOINT PROBABILITY) (2/3)

- Apabila A_1,A_2 dan A_3 adalah 3 **kejadian yang saling lepas** pada sebuah ruang sampel S, dan B adalah kejadian sembarang lainnya pada ruang sampel S tersebut maka kejadian B terhadap A_1,A_2 dan A_3 dapat dinyatakan sebagai:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$$



PROBABILITAS MARGINAL (DISJOINT PROBABILITY) (3/3)

- Karena kejadian $(B \cap A_1), (B \cap A_2)$ dan $(B \cap A_3)$ saling lepas, maka probabilitas kejadian B dapat dinyatakan sebagai :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

- Sedangkan:

$$P(B \cap A_1) = P(B | A_1).P(A_1),\ P(B \cap A_2) = P(B | A_2).P(A_2),$$
$$P(B \cap A_3) = P(B | A_3).P(A_3)$$

- Sehingga probabilitas marginal kejadian B :

$$P(B) = P(B | A_1).P(A_1) + P(B | A_2).P(A_2) + \mathrm{P}(B | A_3).P(A_3)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} P(B | A_i).P(A_i)$$

KEDUDUKAN JOINT DAN DISJOINT PROBABILITY

Joint Probability dari A_2 dan B_1

	A_1	A_2	TOTAL
B_1	a/N	b/N	(a+b)/N
B_2	c/N	d/N	(c+d)/N
TOTAL	(a+c)/N	(b+d)/N	

Marginal Probability dari A_1

- **Contoh 1:**
  - Seorang investor potensial mengevaluasi hubungan antara kinerja reksa dana dan titel MBA dari manajernya. Didapatkan hasil seperti pada tabel di bawah.

	Reksa dana mempengaruhi pasar (B_1)	Reksa dana tidak mempengaruhi pasar (B_2)	Probabilitas Marginal $P(A_i)$
Lulusan MBA (A_1)	0,11	0,29	
Bukan Lulusan MBA (A_2)	0,06	0,54	
Probabilitas Marginal $P(B_j)$			

1. Berapa probabilitas reksadana mempengaruhi pasar yang manajernya lulusan MBA ?
2. Berapa probabilitas reksadana mempengaruhi pasar yang manajernya bukan lulusan MBA ?
3. Berapa probabilitas reksadana tidak mempengaruhi pasar

Jawab:

1. Probabilitas bahwa reksadana mempengaruhi pasar dan manager lulusan MBA

$$P(A_1 \cap B_1) = P(B_1 \cap A_1) = 0,11$$

2. Probabilitas bahwa reksadana mempengaruhi pasar dan manager bukan lulusan MBA

$$P(A_2 \cap B_1) = P(B_1 \cap A_2) = 0,06$$

3. Probabilitas bahwa reksadana tidak mempengaruhi pasar

$$P(B_2 \cap A_1) + P(B_2 \cap A_2) = P(B_2) = 0,29 + 0,54 = 0,83$$

- **Contoh 2:** Probabilitas Gabungan

  Pak Rudi memiliki 30% keyakinan bahwa perusahaannya akan mendirikan kantor cabang baru di Bandung. Jika memang ada, dia 60% yakin bahwa dia yang akan menjadi manager di kantor cabang baru tersebut. Berapa probabilitas kantor cabang Bandung memiliki manajer ?

Jawab:

B=kantor cabang baru di Bandung, $P(B) = 0.3$

$M \mid B =$ pak Rudi jadi manager kantor cabang Bandung, $P(M \mid B) = 0.6$

$B \cap M = M \cap B =$ kantor cabang Bandung memiliki manajer

$$P(M \cap B) = P(M \mid B).P(B) = 0.6x0.3 = 0.18$$

Contoh 3: Probabilitas Marginal

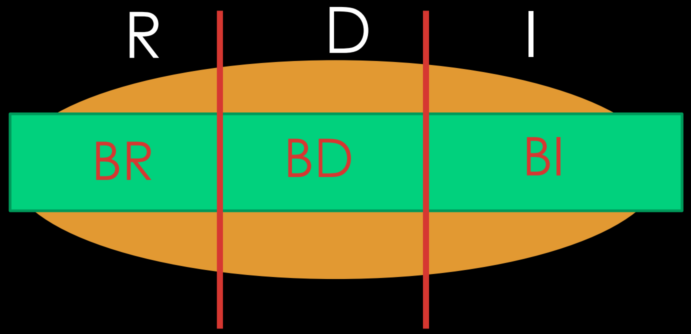
Dalam sebuah negara diadakan jajak pendapat terhadap voter yang berasal dari 3 partai politik:

60 % voter dari partai Republik, 30% dari partai Demokrat dan 10% Independen

Ketika pemilih tersebut ditanya tentang peningkatan anggaran belanja militer:

40% dari Republik menolak, 65% dari Demokrat menolak dan 55% dari Independen menolak

Berapa probabilitas dari pemilihan voter secara random yang menyatakan menolak peningkatan anggaran belanja militer ?



- **Jawab:**

$S =$ voter di negara, $P(S) = 1$

$R =$ voter Republik, $P(R) = 0,6$

$D =$ voter Republik, $P(D) = 0,3$

$I =$ voter Republik, $P(I) = 0,1$

$P(B|R) =$ menolak dari voter Republik $=0,4$

$P(B|D) =$ menolak dari voter Republik $=0,65$

$P(B|I) =$ menolak dari voter Republik $=0,55$

sehingga $P(B) =$ menolak :

$$P(B) = P(B|R).P(R) + P(B|D).P(D) + P(B|I).P(I)$$

$$= (0,4x0,6) + (0,65x0,3) + (0,55x0,1)$$

$$= 0,49$$

PROBABILITAS MARGINAL KOMPLEKS

- Jika probabilitas marginal dari kejadian B adalah:

$$P(B) = P(B|A_1).P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + \ldots + P(B|A_n).P(A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)$$

- Maka probabilitas kejadian bersyarat $P(A_1|B)$ dan $P(A_2|B)$ dapat dihitung sebagai:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1).P(A_1)}{\sum P(B|A_i).P(A_i)}$$
$$P(A_2|B) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} = \frac{P(B|A_2).P(A_2)}{\sum P(B|A_i).P(A_i)}$$

TEOREMA BAYES (1/5)

- Jika pada probabilitas kondisional, sebuah kejadian dipengaruhi oleh kejadian lain yang muncul sebelumnya,
- Maka teorema Bayes bisa digunakan untuk mencari probabilitas dari kemungkinan penyebab kemunculan sebuah kejadian
- Dalam hal ini, kejadian A_i merupakan sebuah syarat untuk terjadinya kejadian A (penyebab dari terjadinya kejadian A) setelah kejadian A ada
- Jadi, teorema Bayes digunakan untuk merevisi probabilitas berdasarkan informasi baru dan untuk menentukan probabilitas pengaruh tertentu yang muncul sebelumnya

TEOREMA BAYES (2/5)

- Bila ada $A_1, A_2, \ldots A_n$ kejadian saling lepas dalam ruang sampel *S*, dan *B* adalah kejadian lain pada ruang sampel tersebut, probabilitas kejadian bersyarat $A_i \mid B$ dinyatakan sebagai:

$$P\left(A_i \mid B\right) = \frac{P\left(B \cap A_i\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(B \mid A_i\right).P\left(A_i\right)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(B \mid A_j\right).P\left(A_j\right)}$$

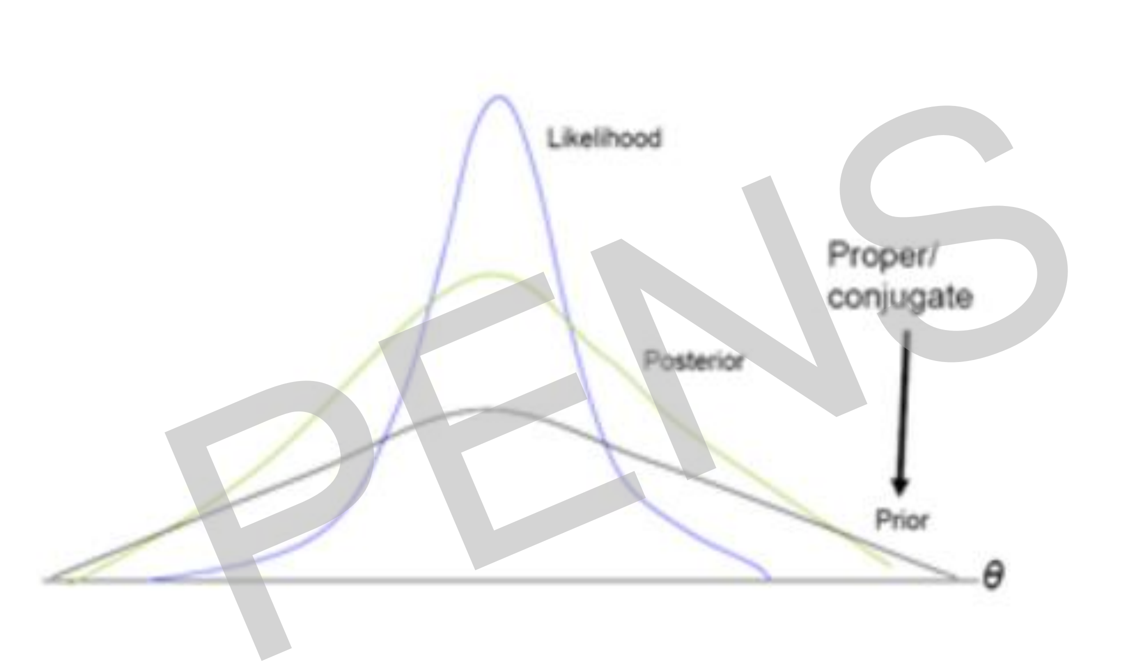
TEOREMA BAYES (3/5)

- Rumus Bayes dinyatakan dalam 3 jenis probabilitas, yang memiliki hubungan:

Posterior = Prior * Likelihood

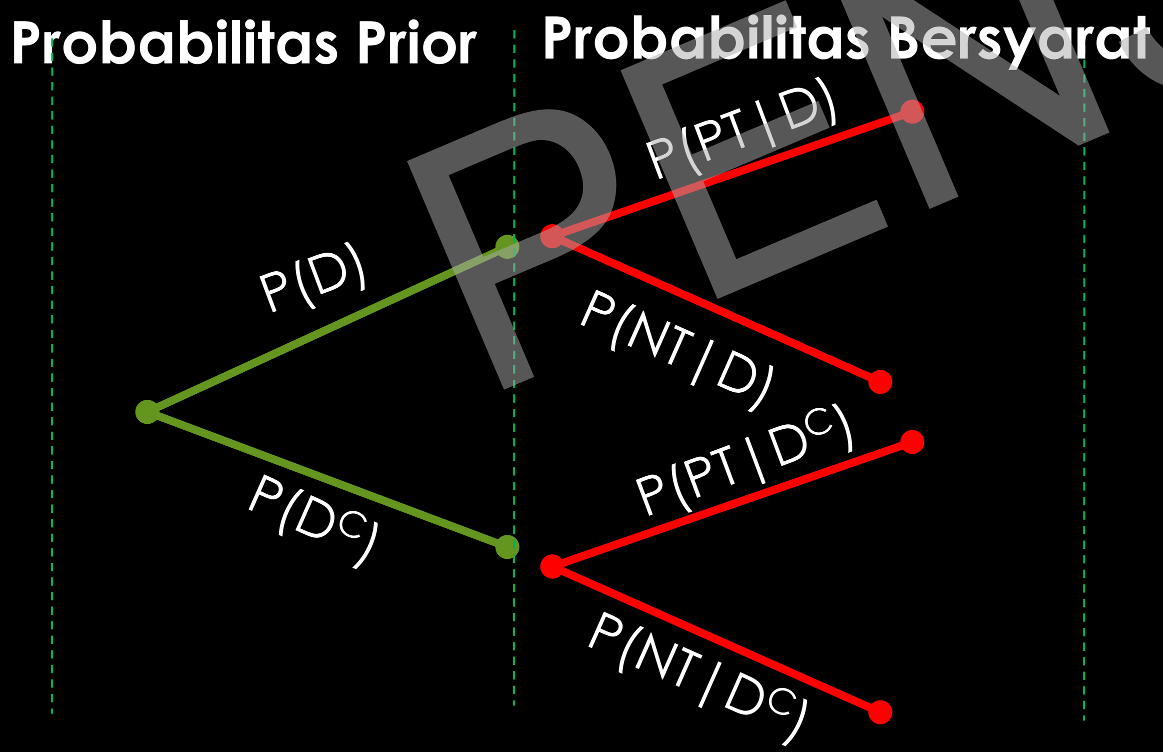
- **Prior**: Distribusi probabilitas yang menyatakan pengetahuan atau ketidakpastian sebuah data yang telah diketahui sebelum observasi
- **Posterior**: Distribusi probabilitas bersyarat yang merepresentasikan parameter apa yang memungkinkan setelah mengamati objek data
- **Likelihood**: Probabilitas yang berada di dalam kategori atau kelas tertentu.

Hubungan distribusi probabilitas Prior, Posterior dan Likelihood yang ideal



TEOREMA BAYES (4/5)

- Teorema Bayes dapat diilustrasikan dalam pohon probabilitas:



Probabilitas Likelihood

$$P(PT \cap D) = P(PT \mid D).P(D)$$

Probabilitas Evidence

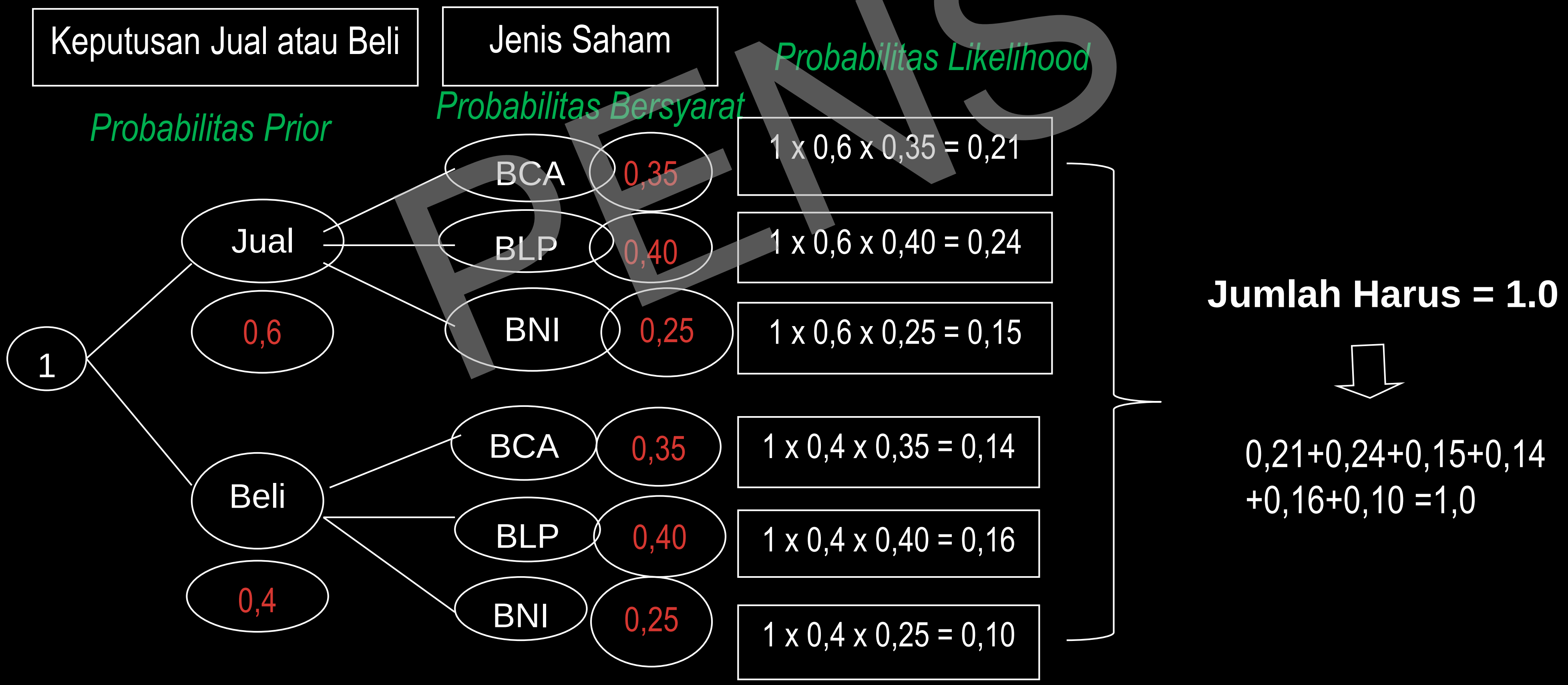
$$P(PT), P(NT)$$

Probabilitas Posterior

$$P(D \mid PT) = \frac{P(PT \mid D).P(D)}{P(PT)}$$

TEOREMA BAYES (5/5)

- Contoh diagram pohon untuk sebuah kasus yang diselesaikan dengan Teorema Bayes:



- **Contoh 1:**

Seorang ahli geologi perusahaan minyak akan memutuskan melakukan pengeboran minyak di sebuah lokasi tertentu. Sebelumnya diperkirakan bahwa probabilitas usaha tersebut berhasil H adalah 20%, sedangkan probabilitas gagal G adalah 80%. Ahli tersebut mendapat tambahan informasi tentang akibat struktur geologis pada lokasi yg akan dijadikan pengeboran minyak.

Didapatkan ada 3 kejadian, yaitu R1 tidak terdapat struktur geologis, R2 terdapat struktur geologis terbuka dan R3 struktur geologis tertutup.

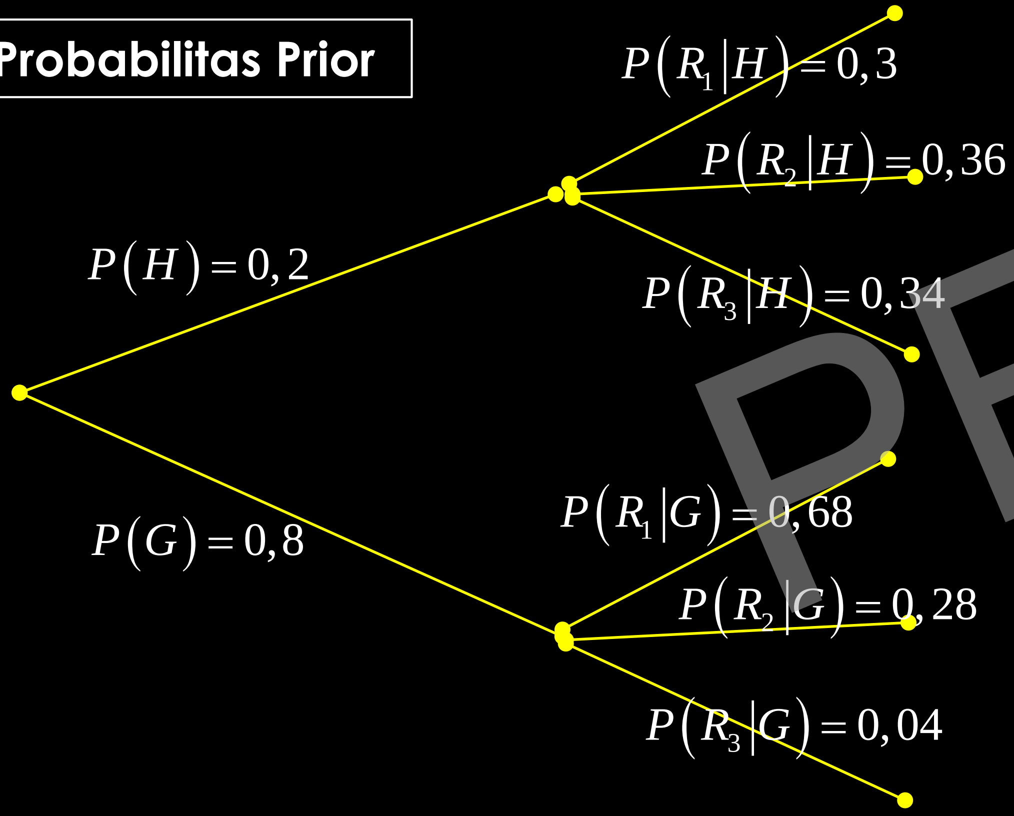
Hubungan antara struktur geologis terhadap keberhasilan pengeboran dinyatakan sebagai berikut:

- Probabilitas tidak terdapat struktur geologis akibat keberhasilan pengeboran 0,3.
- Probabilitas ada struktur geologis terbuka akibat keberhasilan pengeboran 0,36.
- Probabilitas ada struktur geologis tertutup akibat keberhasilan pengeboran 0,34.
- Probabilitas tidak terdapat struktur geologis akibat kegagalan pengeboran 0,68.
- Probabilitas ada struktur geologis terbuka akibat kegagalan pengeboran 0,28.
- Probabilitas ada struktur geologis tertutup akibat kegagalan pengeboran 0,04.

- Soal contoh 1 dapat digambarkan dalam pohon Probabilitas sebagai berikut

Probabilitas Prior

Probabilitas Bersyarat



Probabilitas Likelihood

$$P(R_1 \cap H) = P(R_1|H).P(H)$$
$$P(R_2 \cap H) = P(R_2|H).P(H)$$
$$P(R_3 \cap G) = P(R_3|G).P(G)$$
$$P(R_1 \cap G) = P(R_1|G).P(G)$$
$$P(R_2 \cap G) = P(R_2|G).P(G)$$
$$P(R_3 \cap G) = P(R_3|G).P(G)$$

Probabilitas Evidence

$$P(R_1), P(R_2), P(R_3)$$

Probabilitas Posterior

$$P(H|R_1) = \frac{P(H \cap R_1)}{P(R_1)}$$
$$\vdots$$
$$P(G|R_3) = \frac{P(G \cap R_3)}{P(R_3)}$$

Ditanyakan:

a. Berapa probabilitas tidak terdapat struktur geologis ?
b. Berapa probabilitas terdapat struktur geologis tertutup ?
c. Berapa probabilitas akan dihasilkan minyak dengan syarat tidak terdapat struktur geologis ?

Jawab:

a. $P(R_1) = P(R_1|H).P(H) + P(R_1|G).P(G)$

$= (0,3)(0,2) + (0,68)(0,8)$

$= 0,06 + 0,544 \quad = 0,604$

b. $P(R_3) = P(R_3|H).P(H) + P(R_3|G).P(G)$

$= (0,34)(0,2) + (0,04)(0,8)$

$= 0,068 + 0,032 \quad = 0,1$

Jawaban a. dan b. adalah untuk medapatkan Probabilitas Evidence dengan pendekatan probabilitas marginal

c. $$P(H|R_1) = \frac{P(H \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(R_1|H).P(H)}{P(R_1)}$$

$$= \frac{(0,3)(0,2)}{0,604} = 0,099$$

Probabilitas Posterior

Dengan cara yang sama, carilah:

1. Probabilitas dihasilkan minyak dengan syarat terdapat struktur geologis tertutup
2. Probabilitas dihasilkan minyak dengan syarat terdapat struktur geologis terbuka

- **Contoh 2:**
  - Suatu operator telekomunikasi nirkabel mempunyai 3 pilihan tempat untuk membangun pemancar sinyal yaitu di daerah tengah kota, daerah kaki bukit di kota itu dan daerah tepi pantai, dengan masing-masing mempunyai peluang 0.2; 0.3 dan 0.5. Bila pemancar dibangun ditengah kota, peluang terjadi gangguan sinyal adalah 0.05. Bila pemancar dibangun dikaki bukit, peluang terjadinya gangguan sinyal adalah 0.06.Bila pemancar dibangun ditepi pantai, peluang gangguan sinyal adalah 0.08.
    a. Berapakah peluang terjadinya ganguan sinyal?
    b. Bila diketahui telah terjadinya gangguan pada sinyal, berapa peluang bahwa itu berasal dari pemancar yang dibangun di tepi pantai?

Jawab:

Diketahui:

$B = \text{Peluang terjadi gangguan sinyal}$

$A_1 = \text{Pemancar dibangun di tengah kota}$

$A_2 = \text{Pemancar dibangun di kaki bukit}$

$A_3 = \text{Pemancar dibangun di tepi pantai}$

a. Peluang terjadinya gangguan sinyal:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + \mathrm{P}(B \mid A_3).P(A_3) \\
&= (0,05).(0,2) + (0,06)(0,3) + (0,08)(0,5) \\
&= 0,001 + 0,018 + 0,04 = 0,068
\end{aligned}
$$

b. Peluang terjadinya gangguan pada sinyal, dan itu berasal dari pemancar yang dibangun di tepi pantai

$$
\begin{aligned}
P(A_3 \mid B) &= \frac{P(B \cap A_3)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_3).P(A_3)}{P(B)} \\
&= \frac{(0,08)(0,5)}{0,068} = 0,588
\end{aligned}
$$

- **Contoh 3:**
  - Sebuah vendor ice cream menyediakan tiga rasa: coklat, strawberry dan vanilla. Dari penjualan tercapai sbb: 45% rasa coklat terjual, 30% rasa strawberry dan sisanya rasa vanilla. Ice cream dijual dalam cone, dimana komposisi cone terjual untuk coklat, strawberry dan vanilla adalah 75%, 60% dan 40%. Dengan penjualan secara random, didefinisikan hal-hal berikut ini
    - A1 : terpilih rasa coklat
    - A2 : terpilih rasa strawberry
    - A3 : terpilih rasa vanilla
    - B : ice cream dalam cone
    - B^C : ice cream dalam cup
  - Tentukan probabilitas bahwa:
    1. Pembeli mendapatkan Ice cream yang dijual dalam cone dan berasa coklat
    2. Pembeli mendapatkan Ice cream yang dijual dalam cone dan berasa strawberry
    3. Pembeli mendapatkan Ice cream yang dijual dalam cone dan berasa vanila
    4. Pembeli mendapatkan ice cream yang dijual dalam cup dan berasa coklat
    5. Pembeli mendapatkan ice cream yang dijual dalam cup

- <u>Jawab:</u>

$$P(A_1)=0,45;\ P(A_2)=0,30;\ P(A_3)=0,25;$$
$$P(B|A_1)=0,75;\ P(B|A_2)=0,60;\ \ P(B|A_3)=0,40$$

1. $P(B\cap A_1)=P(B\,|\,A_1).P(A_1)=0,75x0,45=0,338$
2. $P(B\cap A_2)=P(B\,|\,A_2).P(A_2)=0,60x0,30=0,18$
3. $P(B\cap A_3)=P(B\,|\,A_3).P(A_3)=0,40x0,25=0,1$
4. $P(B^C\cap A_1)=P(B^C\,|\,A_1).P(A_1)=(1-P(B|A_1)).P(A_1)=0,25x0,45=0,113$
5. $P(B^C)=1-P(B)=1-(P(B\,|\,A_1).P(A_1)+P(B\,|\,A_2).P(A_2)+P(B\,|\,A_3).P(A_3))$

   $=1-(0,338+0,18+0,1)=0,382$

6. Tentukan probabilitas bahwa ice cream yang dijual berasa coklat karena ditaruh dalam cone

$$P(B) = 1 - 0,382 = 0,618$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1).P(A_1)}{P(B)} = \frac{0,338}{0,618} = 0,547$$

7. Tentukan probabilitas bahwa ice cream yang dijual berasa coklat karena ditaruh dalam cup

$$P(A_1 | B^C) = \frac{P(B^C | A_1).P(A_1)}{P(B^C)} = \frac{0,113}{0,382} = 0,296$$

TUGAS

1. Medical tes di sebuah lab menunjukkan bahwa hasil seseorang terinfeksi virus Covid-19 dengan hasil positif terinfeksi atau negative terinfeksi, dan bisa dianggap sakit atau sehat dengan rincian sbb:

	Sakit	Sehat	TOTAL
Hasil test +	21	5	26
Hasil test -	9	65	74
TOTAL	30	70	100

   1. Berapa probabilitas orang yang mendapatkan hasil test+ ?
   2. Berapa probabilitas orang yang sakit dan ternyata hasil tes nya - ?
   3. Dari orang yang sehat, berapa probabilitas orang yang hasil tes nya+ ?

2. Dari karyawan perusahaan, 30% nya adalah wanita dan 6% adalah wanita yang menikah. Berdasarkan pemilihan karyawan secara acak, dan jika yang terpilih adalah wanita, berapa probabilitasnya bahwa dia menikah ?

3. Direktur pusat komputer dari sebuah perusahaan mengestimasi bahwa 20% dari komputer di perusahaan tersebut mampu mendeteksi virus komputer. Namun dia merasa bahwa 6% dari komputer yang mampu mendeteksi virus tersebut akan men-disable operating system-nya. Hitung berapa probabilitas jika komputer dari perusahaan tersebut akan men-disable operating systemnya ?

4. Sebuah satelit bisa gagal terbang karena faktor kesalahan mesin atau komputer. Untuk sebuah misi, diketahui bahwa probabilitas kesalahan mesin adalah 0,008, probabilitas kesalahan komputer adalah 0,001.

   Saat terjadi kesalahan mesin, probabilitas satelit gagal adalah 0,98

   Saat terjadi kesalahan komputer, probabilitas satelit gagal adalah 0,4

   Saat terjadi kesalahan komponen lain, probabilitas satelit gagal 0.

   a. Tentukan probabilitas satelit gagal terbang.
   b. Tentukan probabilitas satelit gagal terbang dan itu disebabkan karena kesalahan mesin.