Integrasi 2

- Metode Integral Kuadratur Gauss 2 Titik
- Metode Integral Kuadratur Gauss 3 Titik
- Contoh Kasus Permasalahan Integrasi

Metode Integrasi Gauss

- Metode integrasi Gauss merupakan metode yang tidak menggunakan pembagian area yang banyak, tetapi memanfaatkan titik berat dan pembobot integrasi.
- Metode ini secara komputasi memiliki banyak keuntungan karena mempunyai kecepatan yang tinggi. Ini ditunjukkan dengan jumlah pembaginya yang kecil dan dengan jumlah pembagi yang relatif kecil mempunyai kesalahan yang sama dengan metode lain dengan jumlah pembagi yang besar.

Langkah-Langkah Metode Integrasi Gauss :

1. Merubah range $x=[x_{i-1},x_i]=[a,b]$ menjadi $u=[-1,1]$ $\rightarrow$ $x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$
2. Merubah f(x) menjadi g(u) $\rightarrow$ $g(u) = f\left(\frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)\right)$
3. Merubah dx menjadi du $\rightarrow$ $dx = \frac{1}{2}(b-a)du$
4. Merubah bentuk integral

$$L_i = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow L_i = \int_{-1}^{1} g(u)du$$

Metode Integrasi Gauss

Dapat diambil sejumlah titik pendekatan yang digunakan sebagai titik acuan dalam integrasi kuadratur gauss sebagai berikut :

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \sum_{i=1}^{n} A_i g(\mu_i)$$

untuk menentukan nilai μ_i dapat digunakan persamaan polinom Legendre:

$$P_0(u) = 1$$

$$P_1(u) = u$$

$$P_m(u) = \frac{1}{m}\left[(2m-1)uP_{m-1}(u) - (m-1)P_{m-2}(u)\right]$$

untuk menentukan nilai Ai digunakan pembobot sebagai berikut:

$$A_i = \frac{2}{(1-\mu_i^2)\left[P_n^{'}(\mu_i)\right]^2}$$

Integrasi Kuadratur Gauss dengan Pendekatan 2 Titik

Formulasi Integrasi Kuadratur Gauss Pendekatan 2 titik :

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = A_0 g(\mu_0) + A_1 g(\mu_1)$$

Untuk menghasilkan metode ini diambil n=2 pada persamaan polinom Legendre, sehingga diperoleh:

$$P_2(u) = \frac{1}{2}\left[(4-1)u.u - 1.1\right] = \frac{3u^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Akar-akar dari persamaan polinomial di atas adalah :

$$\mu_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{dan} \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nilai *A0* dan *A1* dapat dicari dengan: $A_0 = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right).3} = 1$ dan $A_1 = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right).3} = 1$

Sehingga model dari integrasi kuadratur gauss dengan pendekatan 2 titik dapat dituliskan dengan:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Contoh Integrasi Kuadratur Gauss dengan Pendekatan 2 Titik

Hitung integral : $L = \int_0^1 x^2 dx$

Menghitung x menjadi fungsi u :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

$$x = \frac{1}{2}(1-0)u + \frac{1}{2}(1+0)$$

$$x = \frac{1}{2}(u+1)$$

Sehingga diperoleh fungsi g(u) :

$$g(u) = \frac{1}{2}(1-0)\left[\frac{1}{2}(u+1)\right]^2$$

$$g(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(u+1)\right]^2$$

$$g(u) = \frac{1}{8}(u+1)^2$$

Model integrasi kuadratur gauss pendekatan 2 titik diperoleh :

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2$$

$$= 0.311004 + 0.022329$$

$$= 0.33333$$

Algoritma Integrasi Kuadratur Gauss dengan Pendekatan 2 Titik

1. Definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
3. Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

4. Tentukan fungsi g(u) dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)\, f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$$

5. Hitung:

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Integrasi Kuadratur Gauss dengan Pendekatan 3 Titik

Formulasi Integrasi Kuadratur Gauss Pendekatan 3 titik :

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = A_0 g(\mu_0) + A_1 g(\mu_1) + A_2 g(\mu_2)$$

Untuk menghasilkan metode ini diambil n=3 pada persamaan polinom Legendre, sehingga diperoleh: $P_3(u) = \frac{1}{3}[5.u.P_2(u) - 2P_1(u)]$

$$= \frac{1}{3}\left[5u.\frac{1}{2}(3u^2-1) - 2u\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{5}{2}u(3u^2-1) - 2u\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{15}{2}u^3 - \frac{9}{2}u\right] = \frac{1}{2}u\left(5u^2-3\right)$$

Akar-akar dari persamaan polinomial di atas adalah :

$$\mu_0 = 0 \qquad \mu_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad \mu_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Nilai *A0*, *A1* dan A2 dapat dicari dengan: $P_3'(u) = \frac{15}{2}u^2 - \frac{3}{2}$

$$A_0 = \frac{2}{(1).\left[P_3'(0)\right]^2} = \frac{2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{8}{9}$$

$$A_{12} = \frac{2}{\left(1-\frac{3}{5}\right)\left[P_3'\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]^2} = \frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)(3)^2} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Sehingga model dari integrasi kuadratur gauss dengan pendekatan 3 titik dapat dituliskan dengan:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Contoh Integrasi Kuadratur Gauss dengan Pendekatan 3 Titik

Hitung integral : $L = \int_0^1 e^x dx$

Menghitung x menjadi fungsi u :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

$$x = \frac{1}{2}(1-0)u + \frac{1}{2}(1+0)$$

$$x = \frac{1}{2}(u+1)$$

Sehingga diperoleh fungsi g(u) :

$$g(u) = \frac{1}{2}(1-0)\left[e^{\left(\frac{1}{2}(u+1)\right)}\right]$$

$$g(u) = \frac{1}{2}\left[e^{\left(\frac{1}{2}(u+1)\right)}\right]$$

Model integrasi kuadratur gauss pendekatan 3 titik diperoleh :

$$L = \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{8}g\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \frac{5}{8}g\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)$$

$$= 0.732765 + 0.310916 + 0.6746$$

$$= 1.718281$$

Algoritma Integrasi Kuadratur Gauss dengan Pendekatan 3 Titik

1. Definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
3. Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

4. Tentukan fungsi g(u) dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)\, f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$$

5. Hitung:

$$L = \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Meskipun dalam beberapa hal integrasi kuadratur Gauss menunjukkan hasil yang lebih baik dari pada metode integrasi Simpson, tetapi dalam penerapannya metode integrasi Simpson lebih banyak digunakan dengan dasar pertimbangan kemudahan dari metode yang digunakan.

Contoh Kasus Penerapan Integrasi Numerik

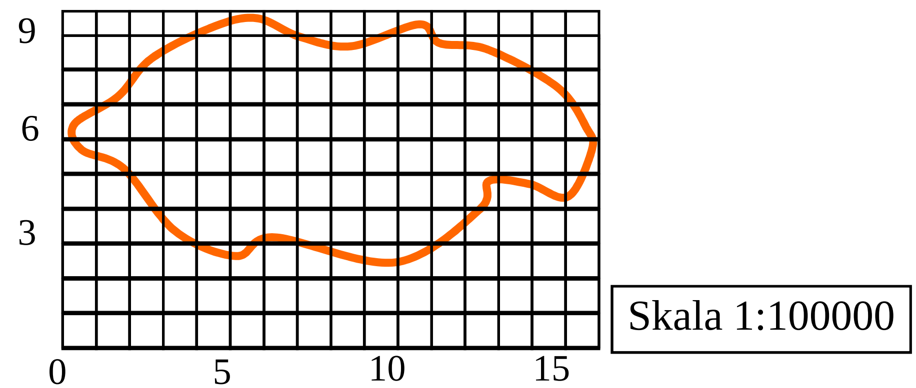
Integral banyak digunakan untuk menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh fungsi-fungsi tertentu, menghitung luas kulit, dan menghitung volume dari benda putar.
Pada pengolahan sinyal digital, integral ini ditemui untuk menghitung konvolusi yang banyak digunakan dalam konsep-konsep pengolahan sinyal dan filter.

Contoh Kasus Permasalahan Integral yang dibahas :

1. Menghitung Luas Daerah Berdasarkan Gambar
2. Menghitung Luas dan Volume Benda Putar

1. Menghitung Luas Daerah Berdasarkan Gambar

Perhatikan gambar peta berikut :



Untuk menghitung luas integral di peta di atas, yang perlu dilakukan adalah menandai atau membuat garis grid pada setiap step satuan h yang dinyatakan dalam satu kotak.
Bila satu kotak mewakili 1 mm, dengan skala yang tertera berarti panjangnya adalah 100.000 mm atau 100 m.
Pada gambar di atas, mulai sisi kiri dengan grid ke 0 dan sisi kanan grid ke n (dalam hal ini n=16).

Tinggi pada setiap grid adalah sebagai berikut:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y(n)	0	1	2.5	4.5	6	7	6.5	6	6	6.5	6.5	6	5.5	3.5	3	3	0

(1) Dengan menggunakan metode integrasi Reimann

$$L = h\sum_{i=0}^{16} y_i = 73.5$$

(2) Dengan menggunakan metode integrasi trapezoida

$$L = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_{16} + 2\sum_{i=1}^{15} y_i \right) = 73.5$$

(3) Dengan menggunakan metode integrasi Simpson

$$L = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{16} + 4\sum_{i=ganjil} y_i + 2\sum_{i=genap} y_i \right) = 74$$

2. Menghitung Luas dan Volume Benda Putar

Untuk menghitung luas dan volume benda putar yang dibentuk oleh fungsi y=f(x) dapat digunakan rumus berikut:

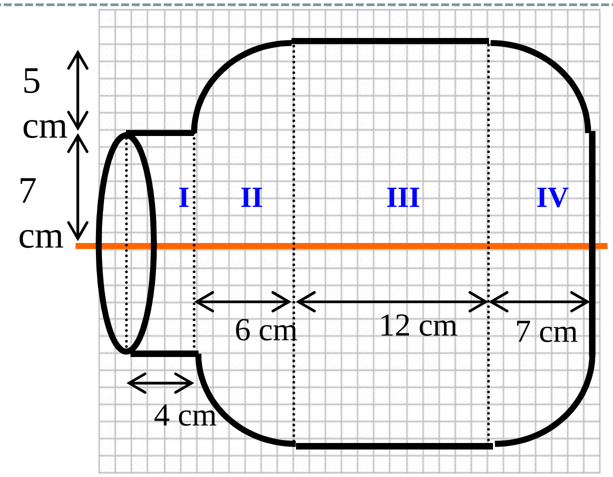
Luas Benda Putar :

$$L_p = 2\pi \int_a^b f(x)dx$$

Volume Benda Putar :

$$V_p = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

Contoh : Hitung luas dan volume benda putar gambar di bawah



Ruang benda putar dapat dibedakan menjadi 4 bagian seperti gambar , dimana bagian I dan III merupakan bentuk silinder yang tidak perlu dihitung dengan membagi-bagi kembali ruangnya, sedangkan bagian II dan IV perlu diperhitungkan kembali.

Bagian I: $L_I = 2\pi(4)(7) = 56\pi$

$V_I = \pi(4)(7)^2 = 196\pi$

Bagian III: $L_{III} = 2\pi(12)(12) = 288\pi$

$V_{III} = 2\pi(12)(12)^2 = 3456\pi$

Sedangkan untuk menghitung bagian II dan IV diperlukan pembagian area , misalkan dengan mengambil h=1 diperoleh:

n	0	1	2	3	4	5
y(n)	7	10	11	11.5	12	12

Dengan menggunakan integrasi trapezoida dapat diperoleh:

$$L_{II} = L_{IV} = 2\pi \frac{h}{2}\left[y_0 + y_5 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i \right] = 108\pi$$

$$V_{II} = V_{IV} = \pi \frac{h}{2}\left[y_0^2 + y_5^2 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i^2 \right] = 1187.5\pi$$

Luas permukaan dari botol adalah:

$$\begin{aligned} L &= L_I + L_{II} + L_{III} + L_{IV} \\ &= 56\pi + 108\pi + 288\pi + 108\pi \\ &= 560\pi \\ &= 1758.4 \end{aligned}$$

Luas = 1758.4 cm^2

Volume botol adalah:

$$\begin{aligned} V &= V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV} \\ &= 196\pi + 1187.5\pi + 3456\pi + 1187.5\pi \\ &= 6024\pi \end{aligned}$$

Volume = 18924.78 cm^3

Latihan Soal

1. Hitung integral : $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ dengan menggunakan Integral Reimann, Trapezoida dan Simpson.
   Bandingkan hasilnya dengan jumlah pembagi yang sama.
   Ambil N=10, 50, 100.

2. Hitung Luas permukaan dan volume benda putar sebuah ban yang mempunyai jari-jari dalam 20 cm dan jari-jari luar 35 cm.

3. Ambil peta wilayah Surabaya. Dengan tetap memperhatikan skala yang digunakan, hitung luas wilayah Surabaya berdasarkan peta tersebut.