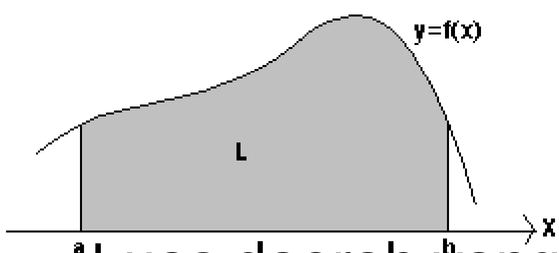
Integrasi 1

- Metode Integral Reimann
- Metode Integral Trapezoida
- Metode Integral Simpson

Permasalahan Integrasi

Perhitungan integral adalah perhitungan dasar yang digunakan dalam kalkulus, dalam banyak keperluan. Integral ini secara definitif digunakan untuk menghitung <u>luas daerah yang dibatasi oleh fungsi y = f(x) dan sumbu x</u>. Perhatikan gambar berikut :



Luas daerah yang diarsir L dapat dihitung dengan :

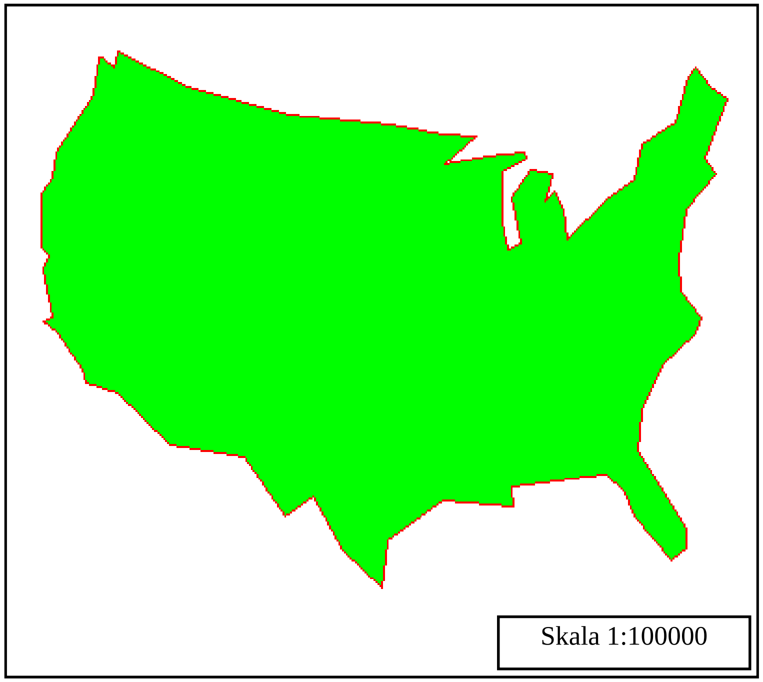
$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

Pada beberapa permasalahan perhitungan integral ini, dapat dihitung secara manual dengan mudah,tetapi pada banyak permasalahan integral sulit sekali dihitung bahkan dapat dikatakan tidak dapat dihitung secara manual

Permasalahan Integrasi

Pada aplikasi, perhitungan integral ini digunakan untuk menghitung luas area pada peta, volume permukaan tanah, menghitung luas dan volume-volume benda putar dimana fungsi f(x) tidak ditulis, hanya digunakan gambar untuk menyajikan nilai f(x)

Perhatikan contoh :



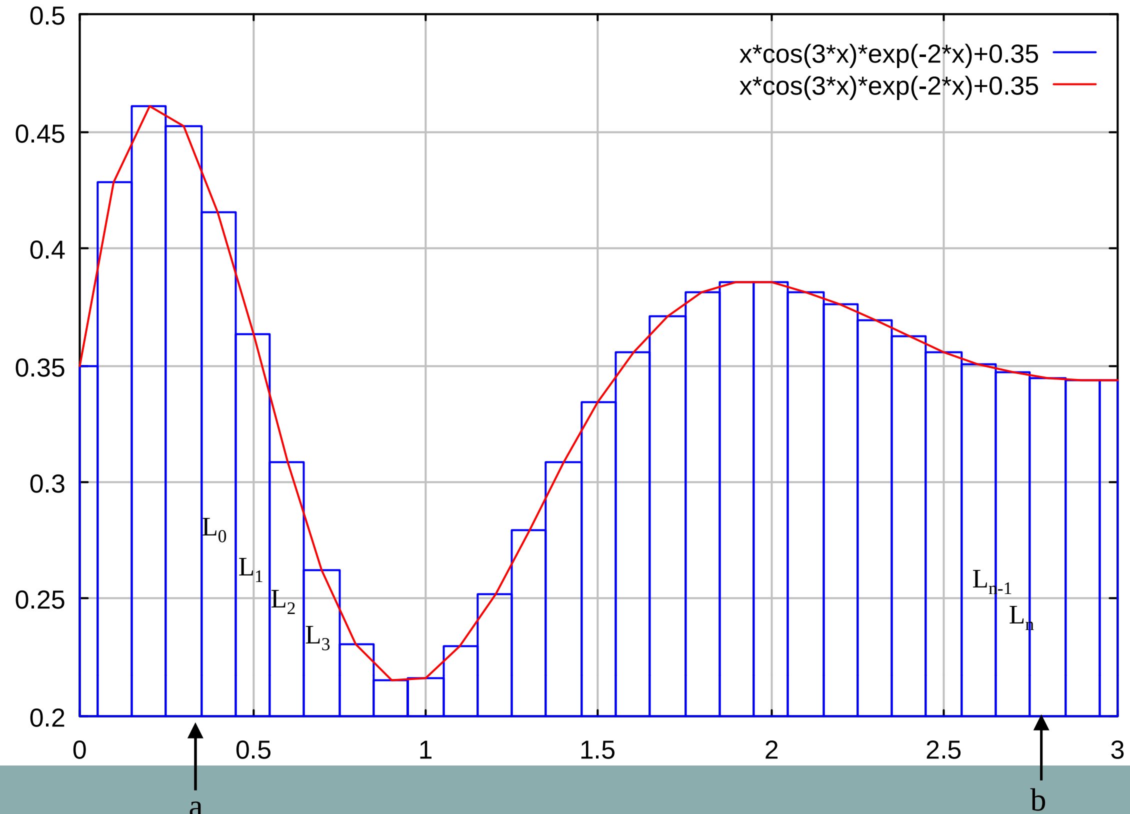
Untuk menghitung luas daerah yang berwarna hijau, perlu digunakan analisa numerik.Karena polanya disajikan dalam gambar dengan faktor skala tertentu.

Metode Integral Reimann

Metode integral Reimann ini merupakan metode integral yang digunakan dalam kalkulus, dan didefinisikan dengan :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Pada metode ini, luasan yang dibatasi oleh y = f(x) dan sumbu x dibagi menjadi N bagian pada range x = $[a, b]$ yang akan dihitung.Kemudian dihitung tinggi dari setiap step ke-*i* yaitu f(xi).*Li* adalah luas setiap persegi panjang dimana Li=f(xi). Δx_i



Metode Integral Reimann

Luas keseluruhan adalah jumlah Li dan dituliskan :

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + .. + L_n$$

$$= f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_3$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

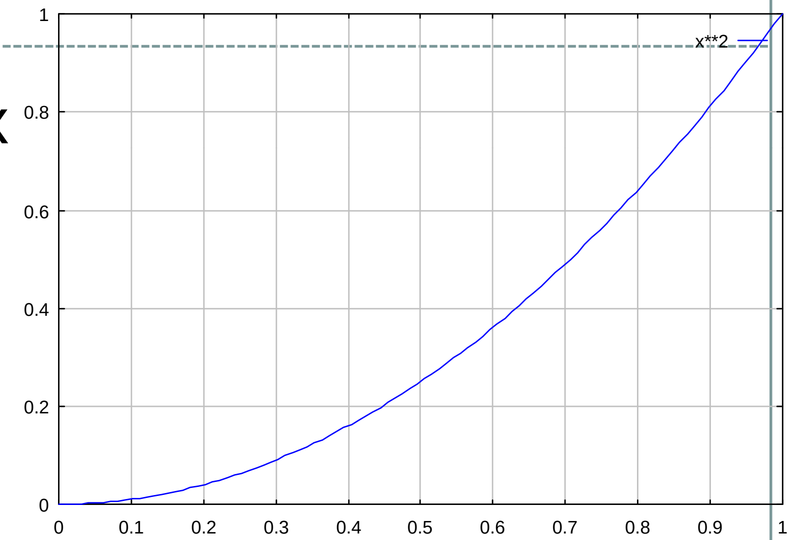
Bila diambil $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = h$

maka didapat metode integral Reimann sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

Contoh Metode Integral Reimann

Hitung luas yang dibatasi y = x^2 dan sumbu x untuk range x = $[0,1]$



L = $\int_0^1 x^2 dx$

Dengan mengambil h=0.1 maka diperoleh tabel :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
f(x)	0	0.01	0.04	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	1

$$L = h.\int_{n=0}^{10} f\left(x_i\right)$$

$$= 0.1\left(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1.00\right)$$

$$= \left(0.1\right)\left(3{,}85\right) = 0{,}385$$

Secara kalkulus : $L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \,|_0^1 = 0{,}3333.....$

e = 0,385-0,333
= 0,052

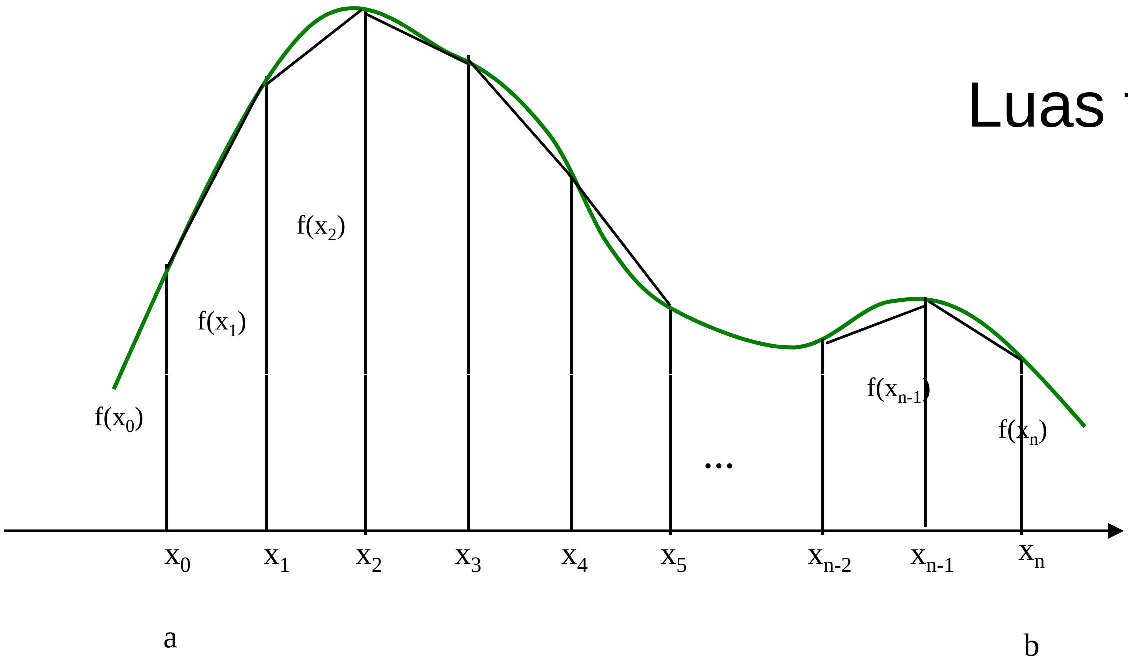
Algoritma Metode Integral Reimann

1. Definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah dan batas atas integrasi
3. Tentukan jumlah pembagi area N
4. Hitung h=(b-a)/N
5. Hitung $L = h.\sum_{i=0}^{N} f(x_i)$

Untuk mengurangi kesalahan dapat dilakukan dengan memperkecil nilai h atau memperbesar jumlah pembagi N.

Metode Integral Trapezoida

Pada metode trapezoida ini setiap bagian dinyatakan sebagai trapezium seperti gambar berikut :



Luas trapezium ke-i (Li) adalah :

$$L_i = \frac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).\Delta x_i$$

atau

$$L_i = \frac{1}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right).\Delta x_i$$

Dan luas keseluruhan dihitung dengan menjumlahkan luas dari semua bagian trapezium. $L = \sum_{i=0}^{\eta-1} L_i$ Sehingga diperoleh

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h\left(f_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

Contoh Metode Integral Trapezoida

Hitung luas yang dibatasi y = 2x^3 dan sumbu x untuk range x = $[0,1]$

L = $\int_0^1 2x^3 dx$

Dengan mengambil h=0.1 maka diperoleh tabel :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
f(x)	0	0,002	0,016	0,054	0,128	0,25	0,432	0,686	1,024	1,458	2

$$L = \frac{0,1}{2}\left\{0 + 2\left(0,002 + 0,016 + 0,054 + 0,128 + \ldots + 1,024 + 1,458\right) + 2\right\} = 0,505$$

Secara kalkulus : $L = \int_0^1 2x^3 dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = 0,5$

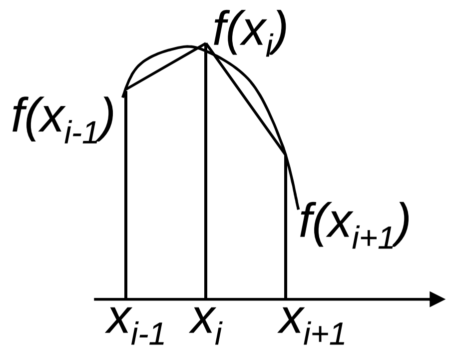
Dengan h=0,1 terjadi kesalahan e = 0,505-0,5 = 0,005

Algoritma Metode Integral Trapezoida

1. Definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah dan batas atas integrasi
3. Tentukan jumlah pembagi area N
4. Hitung h=(b-a)/N
5. Hitung $L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$

Metode Integral Simpson

Metode integrasi Simpson merupakan pengembangan metode integrasi trapezoida, hanya saja daerah pembaginya bukan berupa trapesium tetapi berupa dua buah trapesium dengan menggunakan pembobot berat di titik tengahnya seperti telihat pada gambar berikut ini. Atau dengan kata lain metode ini adalah metode rata-rata dengan pembobot kuadrat.

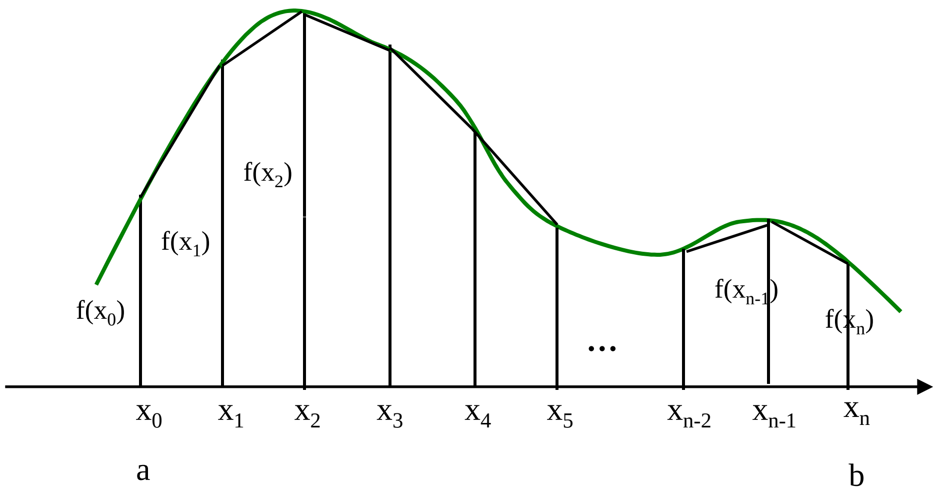


Pemakaian aturan simpson dimana bobot *fi* sebagai titik tengah dikalikan dengan 2 untuk menghitung luas bangun diatas dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 2f_i\right) + \frac{h}{3}\left(2f_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right)$$

Luas daerah yang dibatasi fungsi y=f(x) dan sumbu x, dihitung dengan aturan Simpson :

$$L = \frac{h}{3}\left(f_0 + 2f_1\right) + \frac{h}{3}\left(2f_1 + f_2\right) + \frac{h}{3}\left(f_2 + 2f_3\right) + \frac{h}{3}\left(2f_3 + f_4\right) + \ldots + \frac{h}{3}\left(f_{n-2} + 2f_{n-1}\right) + \frac{h}{3}\left(2f_{n-1} + f_n\right)$$



Atau dapat ditulis :

$$L = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i\ ganjil} f_i + 2\sum_{i\ genap} f_i + f_n \right)$$

Contoh Metode Integral Simpson

Hitung luas yang dibatasi y = $2x^3$ dan sumbu x untuk range x = $[0,1]$

L = $\int_0^1 2x^3 dx$

Dengan mengambil h=0.1 maka diperoleh tabel :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
f(x)	0	0,002	0,016	0,054	0,128	0,25	0,432	0,686	1,024	1,458	2

$$L = \frac{0{,}1}{3}\left(0 + (4)(0{,}002) + (2)(0{,}016) + (4)(0{,}054) + (2)(0{,}128) + \ldots + (2)(1{,}024) + (4)(1{,}458) + 2\right)$$

$$= \frac{0{,}1}{3}(15) = 0{,}5$$

Secara kalkulus : $L = \int_0^1 2x^3 dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = 0{,}5$

Dengan h=0,1 terjadi kesalahan e = 0,5-0,5 = 0

Algoritma Metode Integral Simpson

1. Definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah dan batas ata integrasi
3. Tentukan jumlah pembagi area N
4. Hitung h=(b-a)/N
5. Hitung

$$L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 4\sum_{i\ ganjil} f_i + 2\sum_{i\ genap} f_i + f_n \right)$$

- *Metode ini akan mendapatkan hasil yang baik bila diambil n genap.*
- *Metode ini sangat terkenal karena kesalahannya sangat kecil, sehingga menjadi alternatif yang baik dalam perhitungan integral dan penerapannya khususnya di bidang teknik.*