

Differensiasi Numerik

1

- Selisih Maju
- Selisih Mundur
- Selisih Tengah

Permasalahan Differensiasi Numerik

Secara kalkulus:

2

differensial → perbandingan perubahan tinggi (selisih tinggi) dan perubahan jarak

ditulis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

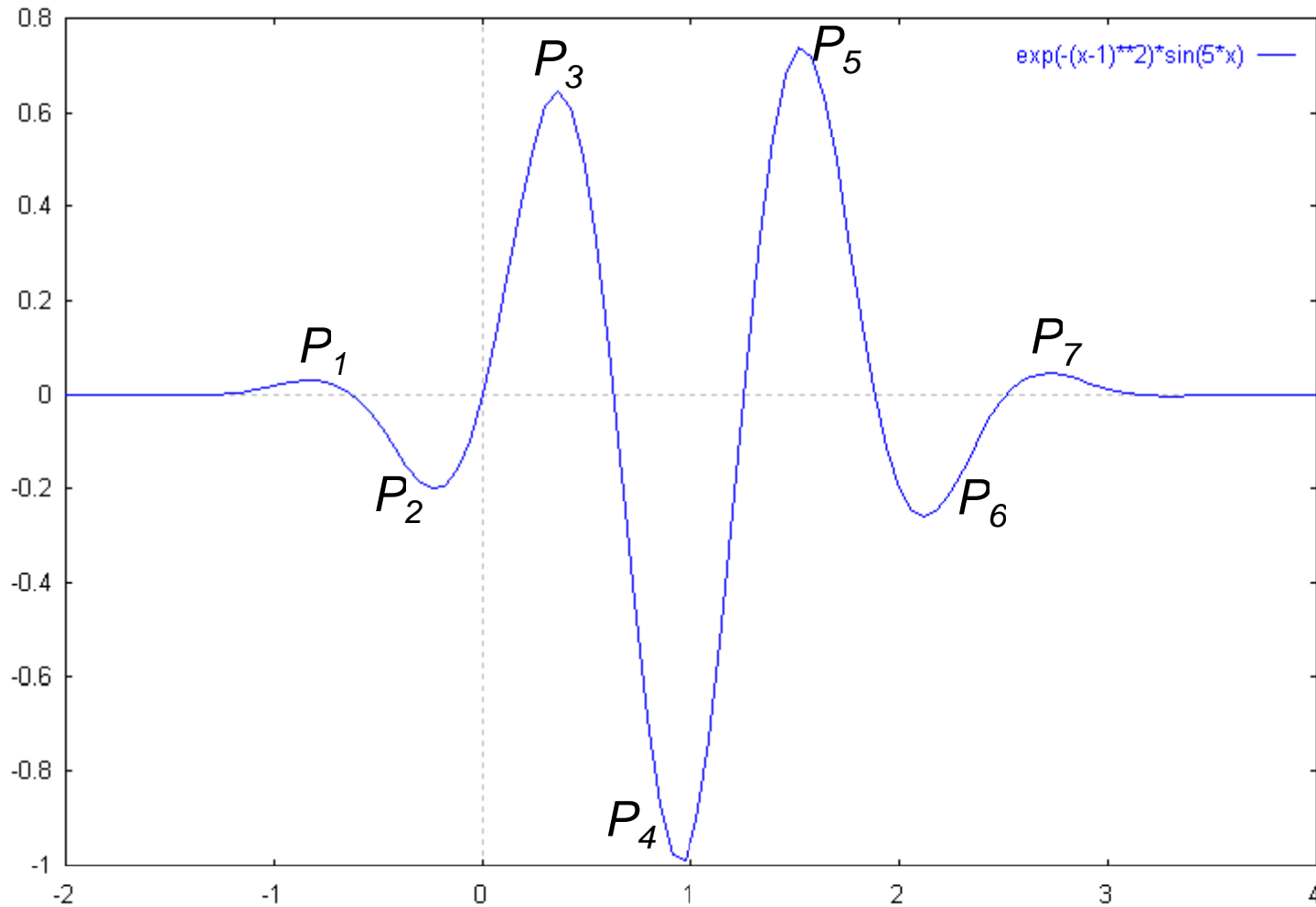
Hampir semua fungsi kontinu dapat dihitung nilai differensialnya secara mudah

Pada pemakaian komputer, permasalahan diferensial merupakan salah satu bagian dari penyelesaian.

Contoh:

- Metode Newton Raphson (mencari akar persamaan)
- Mencari titik puncak kurva

Mencari titik puncak kurva



$P_1, P_3, P_5, P_7 =$ Titik puncak maksimum

$P_2, P_4, P_6 =$ Titik puncak minimum

Definisi Titik Puncak

Definisi 1.

Suatu titik a pada kurva $y=f(x)$ dinamakan titik puncak bila dan hanya bila : $f'(a)=0$

Definisi 2:

Sebuah titik puncak a dikatakan sebagai titik puncak maksimum pada kurva $y=f(x)$ bila : $f''(a) < 0$

Definisi 3:

Sebuah titik puncak a dikatakan sebagai titik puncak minimum pada kurva $y=f(x)$ bila : $f''(a) > 0$

Penyelesaian Differensiasi dengan Metode Numerik

5

Hubungan antara nilai fungsi dan perubahan fungsi untuk setiap titiknya didefinisikan dengan :

$$y = f(x) + f'(x).h(x)$$

$f'(x)$ didefinisikan dengan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

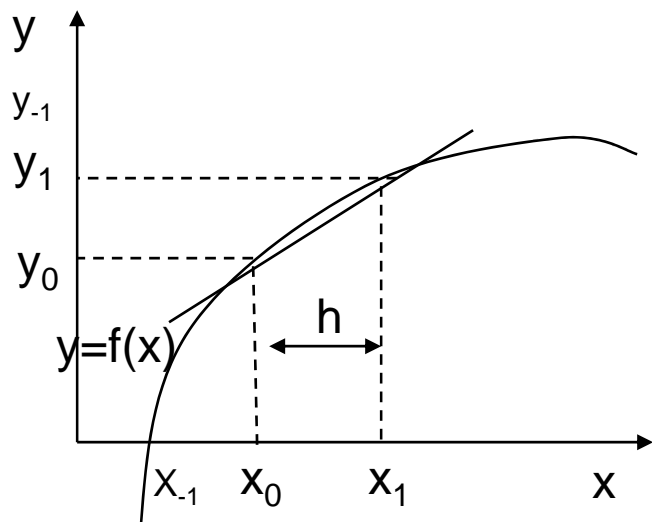
Metode yang digunakan untuk menghitung nilai differensiasi numerik :

- Metode Selisih Maju
- Metode Selisih Mundur
- Metode Selisih Tengah

Differensiasi dengan Metode Selisih Maju

6

Metode selisih maju merupakan metode yang mengadopsi secara langsung definisi differensial, dan dituliskan :



$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

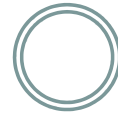
atau

$$f'(x) \approx \frac{f_1 - f_0}{h}$$

Pengambilan h diharapkan pada nilai yang kecil agar errornya kecil. Error metode selisih maju sebesar :

$$E(f) = -\frac{1}{2}hf''(x)$$

Contoh Menghitung Nilai Differensiasi Dg. Selisih Maju



Hitung nilai turunan $f(x)=x^2$, pada $x_0=2$, dan $x_1=2.1$, dengan $h=0.1$

$$f'(2) \approx \frac{f(2.1) - f(2)}{0.1} = \frac{4.41 - 4}{0.1} = \frac{0.41}{0.1} = 4.1$$

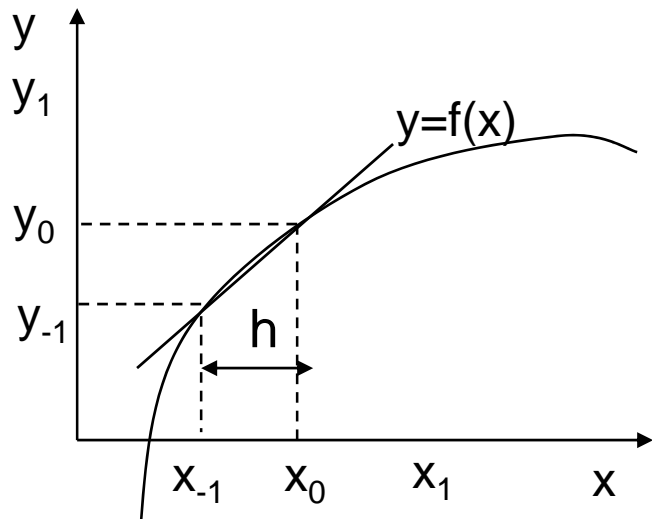
Hitung nilai turunan $f(x)=x^2$, pada $x_0=2$, dan $x_1=2.0001$, dengan $h=0.0001$

$$f'(2) \approx \frac{f(2.0001) - f(2)}{0.0001} = \frac{4.00040001 - 4}{0.0001} = \frac{4.0001 \times 10^{-4}}{10^{-4}} = 4.0001$$

Differensiasi dengan Metode Selisih Mundur

8

Metode selisih mundur dengan nilai x di x_0 dan $x-h$, dengan nilai dua titik : (x_{-1}, f_{-1}) dan (x_0, f_0) , maka $f'(x_0)$



$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

atau

$$f'(x) \approx \frac{f_0 - f_{-1}}{h}$$

Pengambilan h diharapkan pada nilai yang kecil agar errornya kecil.
Error metode selisih maju sebesar :

$$E(f) = -\frac{1}{2} h f''(x)$$

Contoh Menghitung Nilai Differensiasi Dg. Selisih Mundur



Hitung nilai nilai turunan $f(x)=x^2$, pada $x_0=2$, dan $x_{-1}=1.9$, dengan $h=0.1$

$$f'(2) \approx \frac{f(2) - f(1.9)}{0.1} = \frac{4 - 3.61}{0.1} = \frac{0.39}{0.1} = 3.9$$

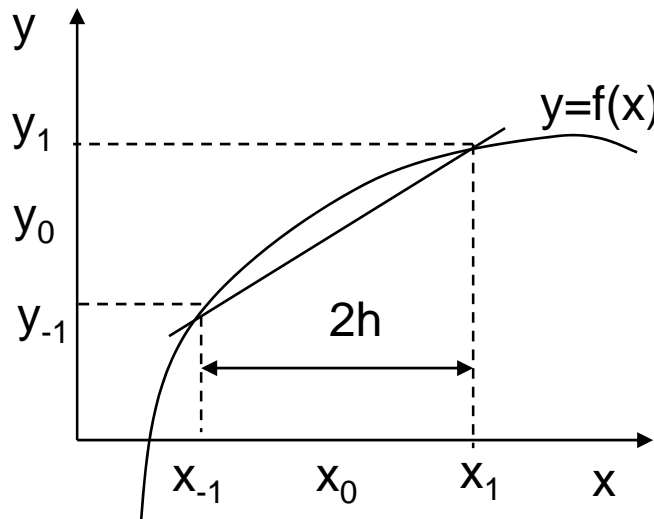
Hitung nilai nilai turunan $f(x)=x^2$, pada $x_0=2$, dan $x_{-1}=1.9999$, dengan $h=0.0001$

$$f'(2) \approx \frac{f(2) - f(1.9)}{0.0001} = \frac{4 - 3.99960001}{0.0001} = \frac{3.9999 \times 10^{-4}}{10^{-4}} = 3.9999$$

Differensiasi dengan Metode Selisih Tengah

10

Metode selisih tengah dengan nilai x di $x+h$ dan $x-h$, dengan nilai dua titik : (x_{-1}, f_{-1}) dan (x_1, f_1) , maka $f'(x_0)$



$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

atau

$$f'(x) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Pengambilan h diharapkan pada nilai yang kecil agar errornya kecil.
Error metode selisih maju sebesar :

$$E(f) = -\frac{1}{6} h f'''(x)$$

Contoh Menghitung Nilai Differensiasi Dg. Selisih Tengahan



Hitung nilai nilai turunan $f(x)=x^2$, pada $x_{-1}=1.9$, dan $x_1=2.1$, dengan $h=0.1$

$$f'(2) \approx \frac{f(2.1) - f(1.9)}{2 * 0.1} = \frac{4.41 - 3.61}{0.2} = \frac{0.8}{0.2} = 4$$

Hitung nilai nilai turunan $f(x)=x^2$, pada $x_{-1}=1.9999$, dan $x_1=2.0001$, dengan $h=0.0001$

$$f'(2) \approx \frac{f(2.0001) - f(1.9999)}{2 * 0.0001} = \frac{4.00040001 - 3.99960001}{2.0001} = \frac{8 \times 10^{-4}}{2 * 10^{-4}} = 4$$

Contoh Menghitung Nilai Differensiasi Pada Range [a,b] Dg. Selisih Maju

Hitung differensial $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range $x=[0,1]$
 $h=0.1$ $h=0.0001$

x	F(x)	F'(x)- eksak	F'(x)- smaju	Error
0	1	2	1.79763	0.202366
0.1	1.17976	1.59384	1.39065	0.203185
0.2	1.31883	1.18937	0.994687	0.194687
0.3	1.4183	0.80455	0.625607	0.178943
0.4	1.48086	0.453175	0.295198	0.157977
0.5	1.51038	0.145042	0.0113594	0.133682
0.6	1.51151	-0.113782	-0.22154	0.107759
0.7	1.48936	-0.320553	-0.402225	0.0816713
0.8	1.44914	-0.475378	-0.532005	0.056627
0.9	1.39594	-0.580684	-0.614251	0.0335669
1	1.33451	-0.640696	-0.653868	0.013172

x	F(x)	F'(x)- eksak	F'(x)- smaju	Error
0	1	2	1.9998	0.000200003
0.0001	1.0002	1.9996	1.9994	0.000200013
....
0.5	1.51038	0.145042	0.1449	0.00014209
0.5001	1.51039	0.144758	0.144616	0.000142066
...
0.7499	1.47122	-0.404201	-0.404278	7.73773e-005
0.75	1.47118	-0.404355	-0.404433	7.73517e-005
...
0.9999	1.33458	-0.640656	-0.640676	1.95717e-005
1	1.33451	-0.640696	-0.640715	1.95518e-005

Rata-rata Error = 0.136364

Rata-rata Error = 0.00013204

Contoh Menghitung Nilai Differensiasi Pada Range [a,b] Dg. Selisih Mundur

Hitung differensial $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range $x=[0,1]$

$h=0.1$

$h=0.0001$

x	F(x)	F'(x)- eksak	F'(x)- smundur	Error
0	1	2	2.19564	0.195636
0.1	1.17976	1.59384	1.79763	0.203796
0.2	1.31883	1.18937	1.39065	0.20128
0.3	1.4183	0.80455	0.994687	0.190137
0.4	1.48086	0.453175	0.625607	0.172433
0.5	1.51038	0.145042	0.295198	0.150156
0.6	1.51151	-0.113782	0.0113594	0.125141
0.7	1.48936	-0.320553	-0.22154	0.0990131
0.8	1.44914	-0.475378	-0.402225	0.0731529
0.9	1.39594	-0.580684	-0.532005	0.0486791
1	1.33451	-0.640696	-0.614251	0.0264449

x	F(x)	F'(x)-eksak	F'(x)- smundur	Error
0	1	2	2.0002	0.000199997
0.0001	1.0002	1.9996	1.9998	0.000200007
....
0.5	1.51038	0.145042	0.145184	0.000142107
0.5001	1.51039	0.144758	0.1449	0.000142082
...
0.7499	1.47122	-0.404201	-0.404123	7.73944e-005
0.75	1.47118	-0.404355	-0.404278	7.73688e-005
...
0.9999	1.33458	-0.640656	-0.640637	1.9585e-005
1	1.33451	-0.640696	-0.640676	1.9565e-005

Rata-rata Error = 0.148587

Rata-rata Error = 0.000132052

Contoh Menghitung Nilai Differensiasi Pada Range [a,b] Dg. Selisih Tengah

Hitung differensial $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range $x=[0,1]$

$h=0.1$

$h=0.0001$

x	F(x)	F'(x)- eksak	F'(x)- stengah	Error
0	1	2	1.99664	0.003365
0.1	1.17976	1.59384	1.59414	0.000305
0.2	1.31883	1.18937	1.19267	0.003297
0.3	1.4183	0.80455	0.810147	0.005597
0.4	1.48086	0.453175	0.460403	0.007228
0.5	1.51038	0.145042	0.153279	0.008237
0.6	1.51151	-0.113782	-0.10509	0.008691
0.7	1.48936	-0.320553	-0.31188	0.008671
0.8	1.44914	-0.475378	-0.46712	0.008263
0.9	1.39594	-0.580684	-0.57313	0.007556
1	1.33451	-0.640696	-0.63406	0.006636

x	F(x)	F'(x)- eksak	F'(x)- stengah	Error
0	1	2	2	3.333e-009
0.0001	1.0002	1.9996	1.9996	3.329e-009
....
0.5	1.51038	0.145042	0.145042	8.264e-009
0.5001	1.51039	0.144758	0.144758	8.264e-009
...
0.7499	1.47122	-0.404201	-0.404201	8.527e-009
0.75	1.47118	-0.404355	-0.404355	8.526e-009
...
0.9999	1.33458	-0.640656	-0.640656	6.644e-009
1	1.33451	-0.640696	-0.640696	6.644e-009

Rata-rata Error = 0.00678464

Rata-rata Error = 6.30695e-009