Persamaan Linier Simultan

- Gauss Seidell

Metode Iterasi Gauss Seidell

Metode interasi Gauss-Seidel : metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah.

Bila diketahui persamaan linier simultan:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & + & \ldots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & + & \ldots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\
a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & + & \ldots & + & a_{3n} & x_n & = & b_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & a_{n3} & x_3 & + & \ldots & + & a_{nn} & x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Berikan nilai awal dari setiap x_i (i=1 s/d n) kemudian persamaan linier simultan diatas dituliskan menjadi :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots. - a_{1n}x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{2^2}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots. - a_{2n}x_n\right)$$

....

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots. - a_{nn-1}x_{n-1}\right)$$

Metode Iterasi Gauss Seidell

Penyelesaian pers. linier simultan:

- Bila nilai untuk setiap *xi* (i=1 s/d n) sudah = nilai xi pada iterasi sebelumnya

- Atau proses iterasi dihentikan bila selisih nilai *xi* (i=1 s/d n) dengan nilai *xi* pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai toleransi error yang ditentukan.

Hati-hati dalam menyusun sistem persamaan linier ketika menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel ini. Perhatikan setiap koefisien dari masing-masing xi pada semua persamaan di diagonal utama (a_{ii}). Letakkan nilai-nilai terbesar dari koefisien untuk setiap xi pada diagonal utama. Masalah ini adalah '**masalah pivoting**' yang harus benar-benar diperhatikan, karena penyusun yang salah akan menyebabkan iterasi menjadi divergen dan tidak diperoleh hasil yang benar.

Contoh Metode Iterasi Gauss Seidell

Selesaikan sistem persamaan linier: $x_1 + x_2 = 5$

$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

$$x_1 = 5 - x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2x_1)$$

nilai awal : x1 = 0 dan x2 = 0

iterasi 1 :

$$x_1 = 5 - 0 = 5$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.5) = 1$$

iterasi 2 :

$$x_1 = 5 - 1 = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.4) = \frac{3}{2}$$

iterasi 3 :

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

iterasi 4 :

$$x_1 = 5 - \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{13}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

iterasi 5 :

$$x_1 = 5 - \frac{15}{8} = \frac{25}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{25}{8}\right) = \frac{31}{16}$$

iterasi 6 :

$$x_1 = 5 - \frac{31}{16} = \frac{49}{16}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32}$$

iterasi 7 :

$$x_1 = 5 - \frac{63}{32} = \frac{97}{32}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{97}{32}\right) = \frac{127}{64}$$

Nilai interasi ke-7 sudah tidak berbeda jauh dengan nilai interasi ke-6 maka proses dihentikan dan diperoleh penyelesaian:

Algoritma Metode Iterasi Gauss Seidell

Algoritma Metode Iterasi Gauss-Seidel adalah :

1. Masukkan matrik **A**, dan vektor **B** beserta ukurannya *n*
2. Tentukan batas maksimum iterasi *max_iter*
3. Tentukan toleransi error ε
4. Tentukan nilai awal dari x_i, untuk i=1 s/d n
5. Simpan x_i dalam s_i, untuk i=1 s/d n
6. Untuk i=1 s/d n hitung :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j\right) \qquad e_i = \left|x_i - s_i\right|$$

7. iterasi ← iterasi+1
8. Bila iterasi lebih dari max_iter atau tidak terdapat $e_i < \varepsilon$ untuk i=1 s/d n maka proses dihentikan dari penyelesaiannya adalah x_i untuk i=1 s/d n. Bila tidak maka ulangi langkah (5)

Studi Kasus Persamaan Linier Simultan

Permasalahan penentuan produk berdasarkan persediaan bahan

Mr.X membuat 2 macam boneka A dan B. Boneka A memerlukan bahan 10 blok B1 dan 2 blok B2, sedangkan boneka B memerlukan bahan 5 blok B1 dan 6 blok B2. Berapa jumlah boneka yang dapat dihasilkan bila tersedia 80 blok bahan B1 dan 36 blok bahan B2.

Model Sistem Persamaan Linier Simultan :
Variabel yang dicari adalah jumlah boneka, anggap:

x_1 adalah jumlah boneka A
x_2 adalah jumlah boneka B

Perhatikan dari pemakaian bahan :
B1: 10 bahan untuk boneka A + 5 bahan untuk boneka B = 80
B2: 2 bahan untuk boneka A + 6 bahan untuk boneka B = 36
Diperoleh model sistem persamaan linier

$$10\,x_1 + 5\,x_2 = 80$$
$$2\,x_1 + 6\,x_2 = 36$$

Permasalahan penentuan produk berdasarkan persediaan bahan

Penyelesaian dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut :

Augemented Matrik

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 5 & 80 \\ 2 & 6 & 36 \end{array}\right]$$

B1 <-- B1/10

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0,5 & 8 \\ 2 & 6 & 36 \end{array}\right]$$

B2 <-- B2 - 2 B1

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0,5 & 8 \\ 0 & 5 & 20 \end{array}\right]$$

B2 <-- B2/5

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0,5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

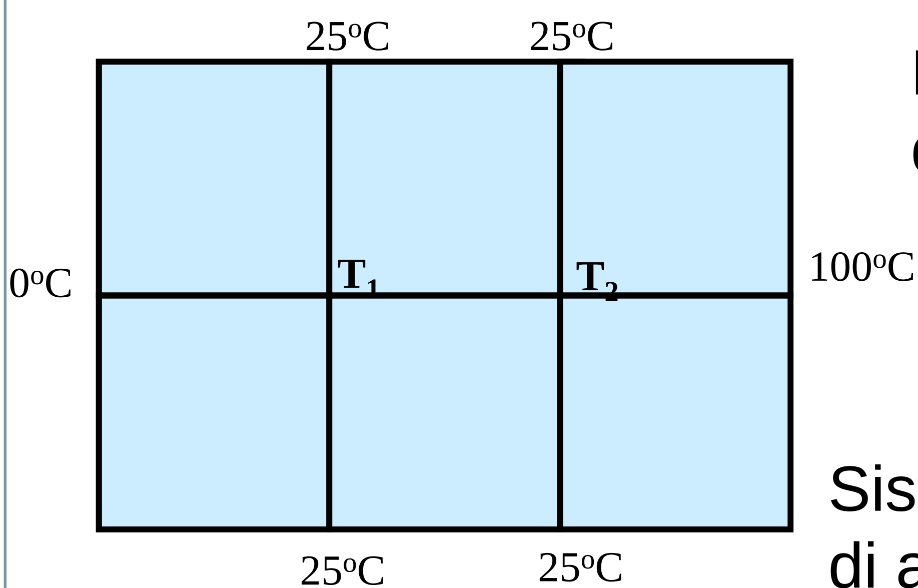
B1 <-- B1 - 0,5 B2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Diperoleh $x_1 = 6$ dan $x_2 = 4$, artinya bahan yang tersedia dapat dibuat 6 boneka A dan 4 boneka B.

Permasalahan aliran panas pada plat baja

Diketahui panas beberapa titik pada plat baja yaitu pada sisi luar. Bila ditentukan bahwa aliran panas bergerak secara laminar dan panas pada sebuah titik adalah rata-rata panas dari 4 titik tetangganya, maka dapat dihitung panas pada titik *T1* dan *T2* sebagai berikut:



Persamaan panas pada titik T1 dan T2 dapat dihitung dengan:

$$T_1 = \tfrac{1}{4}\left(25 + 0 + 25 + T_2\right)$$

$$T_2 = \tfrac{1}{4}\left(25 + T_1 + 25 + 100\right)$$

Sistem persamaan linier dari permasalahan di atas adalah:

$$\begin{aligned} 4T_1 - T_2 &= 50 \\ -T_1 + 4T_2 &= 150 \end{aligned}$$

Permasalahan aliran panas pada plat baja

Penyelesaian dengan menggunakan iterasi Gauss-Seidel, terlebih dahulu ditentukan nilai pendekatan awal $T_1=0$ dan $T_2=0$ dan fungsi pengubahnya adalah :

$$T_1 = \frac{1}{4}\left(50 + T_2\right)$$

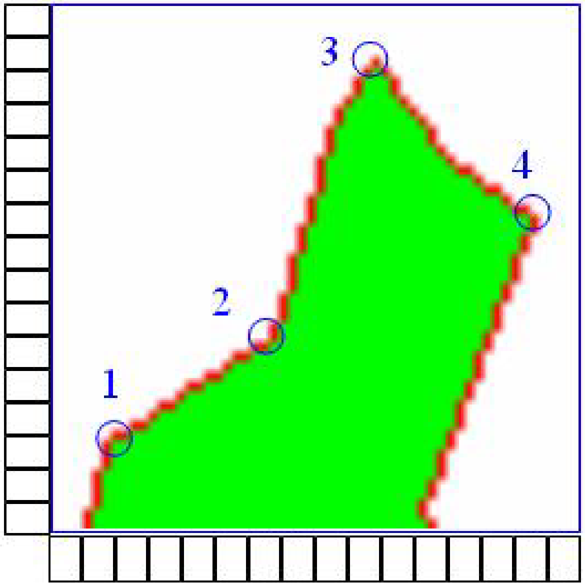
$$T_2 = \frac{1}{4}\left(150 + T_1\right)$$

Diperoleh hasil perhitungan untuk toleransi error 0.0001 sebagai berikut :

Iterasi	x1	x2	e1	e2
0	0	0	-	-
1	12,5	40,625	12,5	40,625
2	22,65625	43,16406	10,15625	2,539063
3	23,29102	43,32275	0,634766	0,158691
4	23,33069	43,33267	0,039673	0,009918
5	23,33317	43,33329	0,00248	0,00062
6	23,33332	43,33333	0,000155	3,87E-05
7	23,33333	43,33333	9,69E-06	2,42E-06

Jadi temperatur pada T1=23,3333 dan T2=43,3333

Penghalusan Kurva Dengan Fungsi Pendekatan Polinomial



Perhatikan ke-4 titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus, sehingga tampak kasar. Untuk menghaluskannya dilakukan pendekatan garis dengan kurva yang dibentuk dengan fungsi pendekatan polinomial. Dari fungsi polinomial yang dihasilkan kurva dapat digambarkan denganlebih halus.Misalkan pada contoh diatas, 4 titik yang ditunjuk adalah (2,3), (7,6), (8,14) dan (12,10). 4 titik ini dapat didekati dengan fungsi polinom pangkat 3 yaitu : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bila nilai x dan y dari 4 titik dimasukkan ke dalam persamaan di atas akan diperoleh model persamaan simultan sebagai berikut :

Titik 1 → 3 = 8 a + 4 b + 2 c + d

Titik 2 → 6 = 343 a + 49 b + 7 c + d

Titik 3 → 14 = 512 a + 64 b + 8 c + d

Titik 4 → 10 = 1728 a + 144 b + 12 c + d

Penghalusan Kurva Dengan Fungsi Pendekatan Polinomial

Augmented Matrik →

8	4	2	1	3
343	49	7	1	6
512	64	8	1	14
1728	144	12	1	10

B1 = B1/8 →	1	0.5	0.25	0.125	0.375
B2 = B2 - 343 B1	0	-122.5	-78.75	-41.88	-122.6
B3 = B3 - 512 B1	0	-192	-120	-63	-178
B4 = B4 - 1728 B1	0	-720	-420	-215	-638

Penghalusan Kurva Dengan Fungsi Pendekatan Polinomial

B2 = B2/(-122.5)	→	1	0	-0.071	-0.046	-0.126
B1 = B1 – 0.5 B1		0	1	0.6429	0.3418	1.001
B3 = B3 +192 B1		0	0	3.4286	2.6327	14.196
B4 = B4 +720B2		0	0	42.857	31.122	82.375

B3 = B3/3.4286	→	1	0	0	0.0089	0.1702
B1 = B1 + 0.071 B3		0	1	0	-0.152	-1.661
B2 = B2 -0.6429 B3		0	0	1	0.7679	4.1405
B4 = B4 -42.857B3		0	0	0	-1.786	-94.71

B4 = B4/(-1.786)	→	1	0	0	0.0089	0.1702
B1 = B1 -0.0089 B4		0	1	0	-0.152	-1.661
B2 = B2 +0.152B4		0	0	1	0.7679	4.1405
B3 = B3 +0.7679B4		0	0	0	-1.786	-94.71

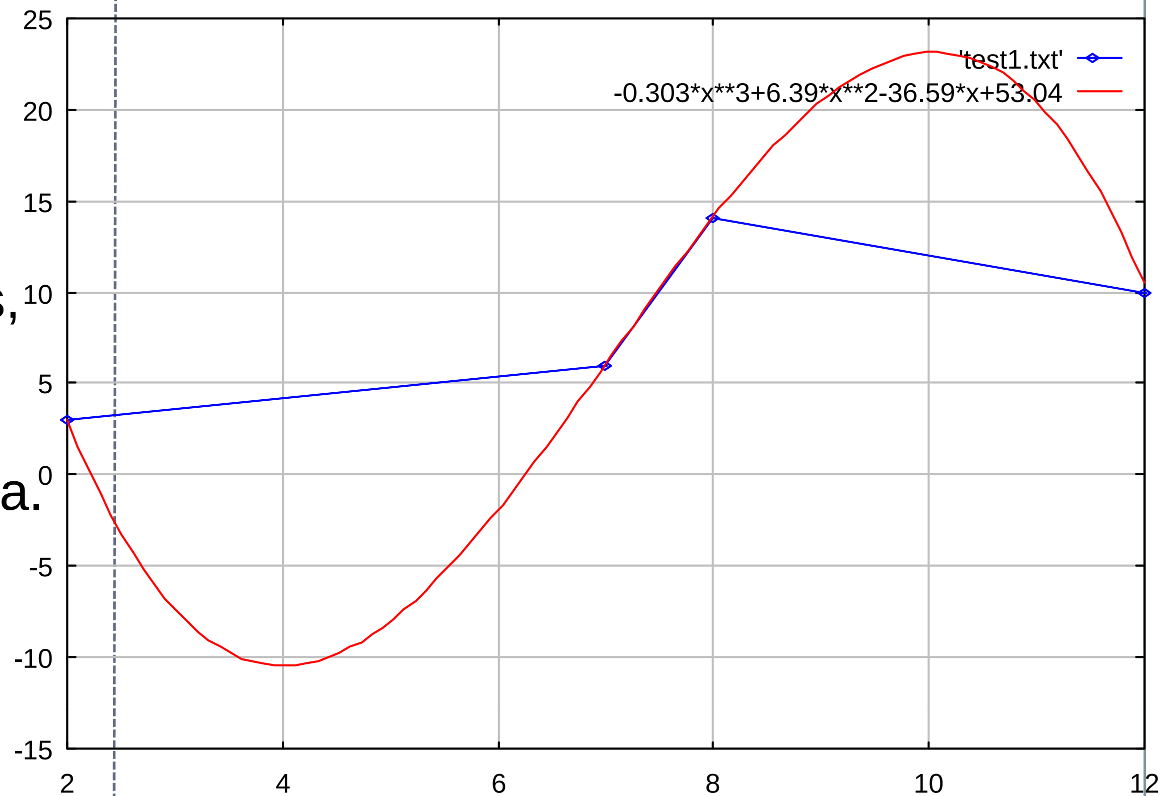
Penghalusan Kurva Dengan Fungsi Pendekatan Polinomial

Diperoleh :
a=-0.303
b=6.39
c=-36.59
d=53.04

dan persamaan polinomial yang diperoleh :

$$y = -0{,}303\, x^3 + 6{,}39\, x^2 - 36{,}59\, x + 53{,}04$$

Hasil penghalusan kurva adalah sebagai berikut:



Hasilnya memang belum tampak bagus, disebabkan pengambilan titiknya yang terlalu jauh dan tingkat polinomial yang belum memenuhi syarat terbaiknya. Hanya saja kurva tersebut benar-benar melewati 4 titik yang ditentukan.

TUGAS

Kerjakan soal pada buku diktat, Bab Persamaan Linier (bab 4) no 1 – 3.