Persamaan Linier Simultan

- Eliminasi Gauss
- Gauss Jordan

Persamaan Linier Simultan

Persamaan linier simultan adalah suatu bentuk persamaan-persamaan yang secara bersama-sama menyajikan banyak variabel bebas. Bentuk persamaan linier simultan dengan *m* persamaan dan *n* variabel bebas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

dimana:

$\boldsymbol{a_{ij}}$ untuk i=1 s/d m dan j=1 s/d n adalah <u>koefisien atau persamaan simultan</u>

$\boldsymbol{x_i}$ untuk i=1 s/d n adalah <u>variabel bebas</u> pada persamaan simultan

Penyelesaian persamaan linier simultan adalah penentuan nilai x_i untuk semua i=1 s/d n yang memenuhi semua persamaan yang diberikan.

Persamaan Linier Simultan

Persamaan linier simultan di atas dapat dinyatakan sebagai bentuk matrik yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A x = B

dimana:

$$A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mi} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} danB = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matrik A=Matrik Koefisien atau Matrix Jacobian
Vektor x =Vektor variabel
Vektor B=Vektor konstanta

Persamaan Linier Simultan

Augmented Matrix (matrik perluasan) dari persamaan linier simultan adalah matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan menambahkan vektor B pada kolom terakhirnya, dan dituliskan:

Augmented (A) = [A B]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Teorema
Persamaan Linier Simultan

Suatu persamaan linier simultan mempunyai penyelesaian tunggal bila memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

(1) Ukuran persamaan linier simultan bujursangkar, dimana jumlah persamaan sama dengan jumlah variable bebas.
(2) Persamaan linier simultan non-homogen dimana minimal ada satu nilai vector konstanta B tidak nol atau ada $b_n \neq 0$.
(3) Determinan dari matrik koefisien persamaan linier simultan tidak sama dengan nol.

Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss : metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas.

Metode eliminasi gauss: metode dimana bentuk matrik augmented, pada bagian kiri diubah menjadi matrik segitiga atas /segitiga bawah dg menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

Sehingga penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(d_{n-1} - c_{n-1,n}x_n\right)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$$

Operasi Baris Elementer (OBE) : operasi pengubahan nilai elemen matrik berdasarkan barisnya, tanpa mengubah matriknya.

OBE pada baris ke-i+k dengan dasar baris ke i dapat dituliskan dengan :

$$a_{i+k,j} = a_{i+k,j} - c.a_{i,j}$$

dimana c : konstanta pengali

dari perbandingan nilai dari elemen $a_{i,i}$ dan $a_{i+k,i}$

Contoh Penyelesaian Pers.Lin.Simultan dg. Metode Eliminasi Gauss

Selesaikan persamaan berikut :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \\ B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 + B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

dengan demikian diperoleh penyelesaian:

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4 + (2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6 - 2 - 3\right) = 1$$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss

Algoritma Metode Eliminasi Gauss adalah sbb :

1. Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n
2. Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A
3. Untuk baris ke *i* dimana *i=1* s/d *n*, perhatikan apakah nilai $a_{i,i}=0$:

   Bila ya :

   pertukarkan baris ke *i* dan baris ke $i+k \le n$, dimana $a_{i+k,i} \neq 0$, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

   Bila tidak : lanjutkan
4. Untuk baris ke *j*, dimana *j = i+1 s/d n*

   Lakukan operasi baris elementer:

   Hitung $c = \dfrac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$

   Untuk kolom *k* dimana *k=1 s/d n+1* hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$

   Hitung akar, untuk *i = n s/d 1* (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama) : $x_i = \dfrac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - a_{i,n}x_n\right)$

   dimana nilai $i+k \le n$

Metode Eliminasi Gauss Jordan

Metode Eliminasi Gauss Jordan: metode pengembangan metode eliminasi gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai d1,d2,d3 ,…,dn dan atau: $x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \dots, x_n = d_n$

Metode eliminasi Gauss-Jordan ini sama seperti metode eliminasi Gauss yaitu menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer). Hanya perhitungan penyelesaian secara langsung diperoleh dari nilai pada kolom terakhir dari setiap baris.

Contoh Penyelesaian Pers.Lin.Simultan dg. Metode Eliminasi Gauss Jordan

Selesaikan persamaan berikut :

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan demikian diperoleh penyelesaian:

x1 = 2 dan *x2 = 1*

Algoritma Metode Eliminasi Gauss Jordan

Algoritma Metode Eliminasi Gauss adalah sbb :

1. Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n
2. Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A
3. Untuk baris ke i dimana i=1 s/d n,

   Perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ =0 :

   Bila ya :

      pertukarkan baris ke i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i} \neq 0$, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

   Bila tidak : lanjutkan

   Jadikan nilai diagonalnya menjadi satu, dengan cara untuk setiap kolom k dimana k=1 s/d n+1, hitung $a_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$
4. Untuk baris ke j, dimana j = i+1 s/d n

   Lakukan operasi baris elementer:

      Hitung $c = a_{j,i}$

      Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$
5. Penyelesaian, untuk i = n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama) $x_i = a_{i,n+1}$

Latihan

Selesaikanlah persamaan berikut ini :

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$$

Gunakan Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan