

Studi Kasus Penyelesaian Pers. Non Linier

1

Muhammad Zen S. Hadi, ST. MSc.

Contoh Kasus

2

- ✓ Penyelesaian persamaan non linier terkadang muncul sebagai permasalahan yang terpisah, tetapi terkadang pula muncul sebagai satu kesatuan atau satu rantai dari penyelesaian permasalahan dimana penyelesaian persamaan non linier justru menjadi kunci dalam perhitungannya.

- ✓ Beberapa contoh permasalahan yang memerlukan penyelesaian persamaan non linier sebagai kuncinya adalah sebagai berikut:
 - Penentuan nilai maksimal dan minimal fungsi non linier
 - Perhitungan nilai konstanta pada matrik dan determinan, yang biasanya muncul dalam permasalahan sistem linier, bisa digunakan untuk menghitung nilai eigen
 - Penentuan titik potong beberapa fungsi non linier, yang banyak digunakan untuk keperluan perhitungan-perhitungan secara grafis.

Penentuan Nilai Maksimal dan Minimal Fungsi Non Linier

3

Pada penyelesaian persamaan non linier dengan fungsi $f(x)$, maka dicari x yang memenuhi $f(x)=0$. Sedangkan pada penentuan nilai maksimal dan minimal dari fungsi $f(x)$, yang dicari adalah nilai x yang memenuhi **$f'(x)=0$** .

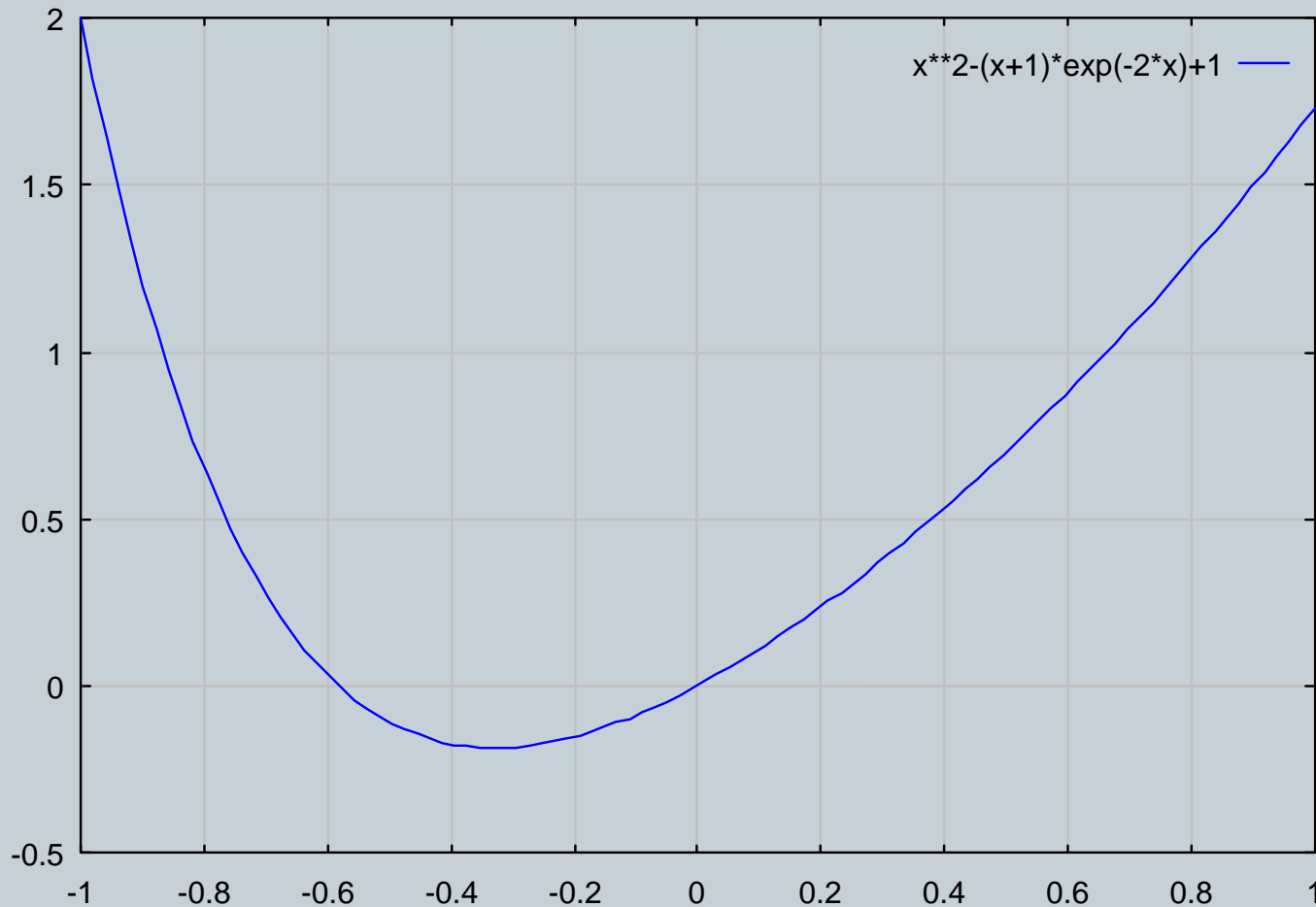
Jadi sebelum menggunakan metode numerik untuk menentukan nilai maksimal dan nilai minimal pada fungsi $f(x)$, maka terlebih dahulu dihitung **$g(x)=f'(x)$** . Nilai fungsi $g(x)$ inilah yang menjadi fungsi acuan untuk menentukan nilai x dimana $g(x)=0$.

Sedangkan untuk menentukan titik yang diperoleh adalah titik maksimal atau titik minimal, maka perlu dihitung **$f''(x)$** .

Contoh Menentukan Nilai Minimal

4

Tentukan nilai minimal dari $f(x) = x^2 - (x+1)e^{-2x} + 1$



Dari gambar di atas nilai minimal terletak antara -0.4 dan -0.2

Contoh Menentukan Nilai Minimal

5

Untuk menentukan nilai minimal terlebih dahulu dihitung $g(x) = f'(x)$

$$g(x) = 2x - e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} = 2x + (2x+1)e^{-2x}$$

Jadi permasalahannya menjadi menyelesaikan persamaan :

$$2x + (2x+1)e^{-2x} = 0$$

Dengan menggunakan metode Secant diperoleh :

Pendekatan awal di $x_0 = -0.4$ dan $x_1 = -0.2$

Toleransi error = $1e-005$

Iterasi	x	f(x)
1	-0.316495	0.0581765
2	-0.332006	-0.0113328
3	-0.329477	0.000208218
4	-0.329523	7.28621e-007

Akar persamaan di $x = -0.329523$

Jadi nilai minimal fungsi $f(x)$ terletak di $x = \mathbf{-0.329523}$

Penentuan Nilai Eigen Pada Matrik

6

Nilai eigen pada suatu matrik A , merupakan nilai-nilai yang menyajikan karakteristik kestabilan matrik. Nilai eigen ini dapat dihitung menggunakan :

$$|A - \lambda I| = 0$$

dimana I adalah matrik identitas dan λ adalah nilai eigen dari matrik A .

Bila matrik A mempunyai ukuran $n \times n$ maka akan terdapat n nilai λ yang disajikan dalam bentuk persamaan polinomial pangkat n sebagai berikut :

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Penentuan nilai λ merupakan permasalahan dalam penyelesaian persamaan non linier.

Contoh Penentuan Nilai Eigen Pada Matrik

7

Tentukan nilai eigen dari :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat diperoleh dengan :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau bisa dituliskan dengan :

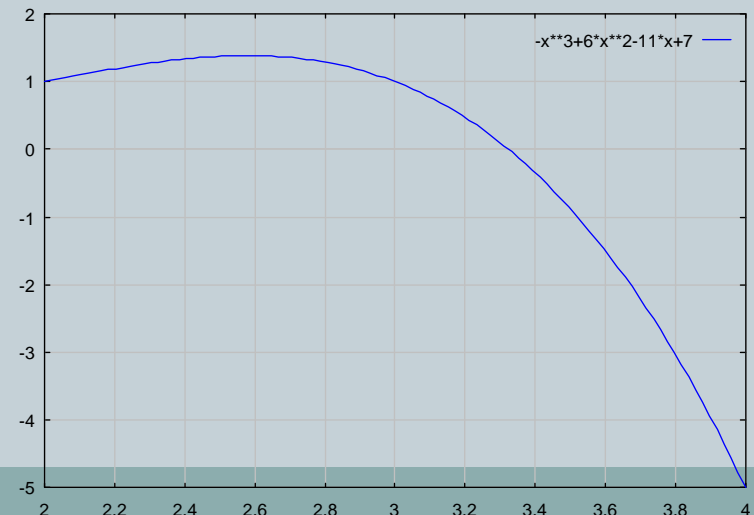
$$(2 - \lambda)\{(3 - \lambda)(1 - \lambda)\} + 1 = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 7 = 0$$

Secara grafis bisa digambarkan :

Aturan Sarrus

$$\text{Det}(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12}$$



Contoh Penentuan Nilai Eigen Pada Matrik

8

Dengan menggunakan metode secant diperoleh:

Pendekatan awal di $x_0 = 3.2$ dan $x_1 = 3.4$

Toleransi error = $1e-005$

Iterasi	x	f(x)
1	3.31569	0.0381934
2	3.32411	0.00258307
3	3.32472	-2.18963e-005
4	3.32472	1.23711e-008

Akar persamaan di $x = 3.32472$

Menghitung Nilai Akar

9

Perhitungan nilai akar a dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan $f(x)=x^2-a$. Ini dapat dilakukan dengan menghitung penyelesaian dari persamaan : $x^2 - a = 0$

Menghitung akar 3 dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan : $x^2 - 3 = 0$

Dengan menggunakan metode secant diperoleh :

Pendekatan awal di $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$

Toleransi error = $1e-005$

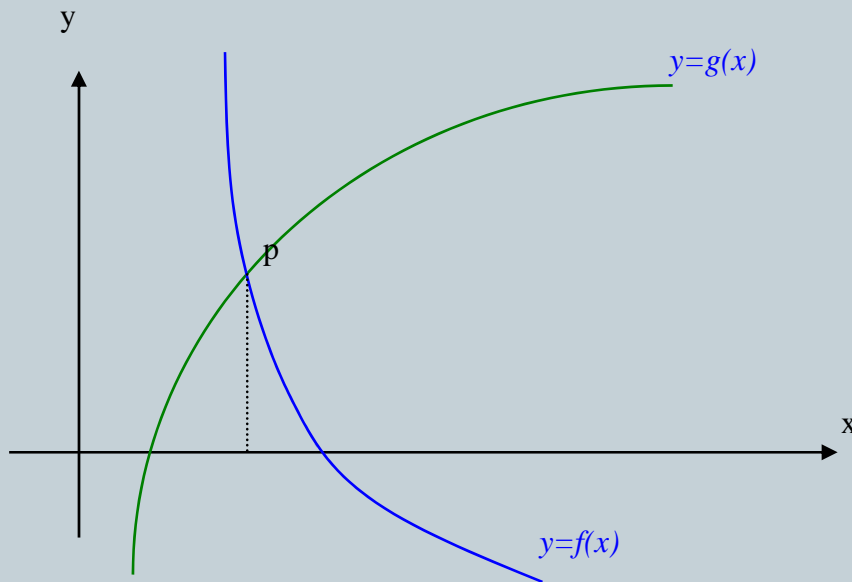
Iterasi	x	f(x)
1	1.66667	-0.222222
2	1.72727	-0.0165289
3	1.73214	0.000318878
4	1.73205	-4.40416e-007

Akar persamaan di $x = \mathbf{1.73205}$

Menghitung Titik Potong 2 Kurva

10

Perhatikan dua buah kurva $y=f(x)$ dan $y=g(x)$ yang berpotongan di titik p seperti gambar berikut :



Untuk menentukan titik potong dua buah kurva di atas secara numerik maka pertama kali yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi dari persamaan dimana titik potong didefinisikan dgn :

$$f(x) = g(x)$$

atau

$$f(x) - g(x) = 0$$

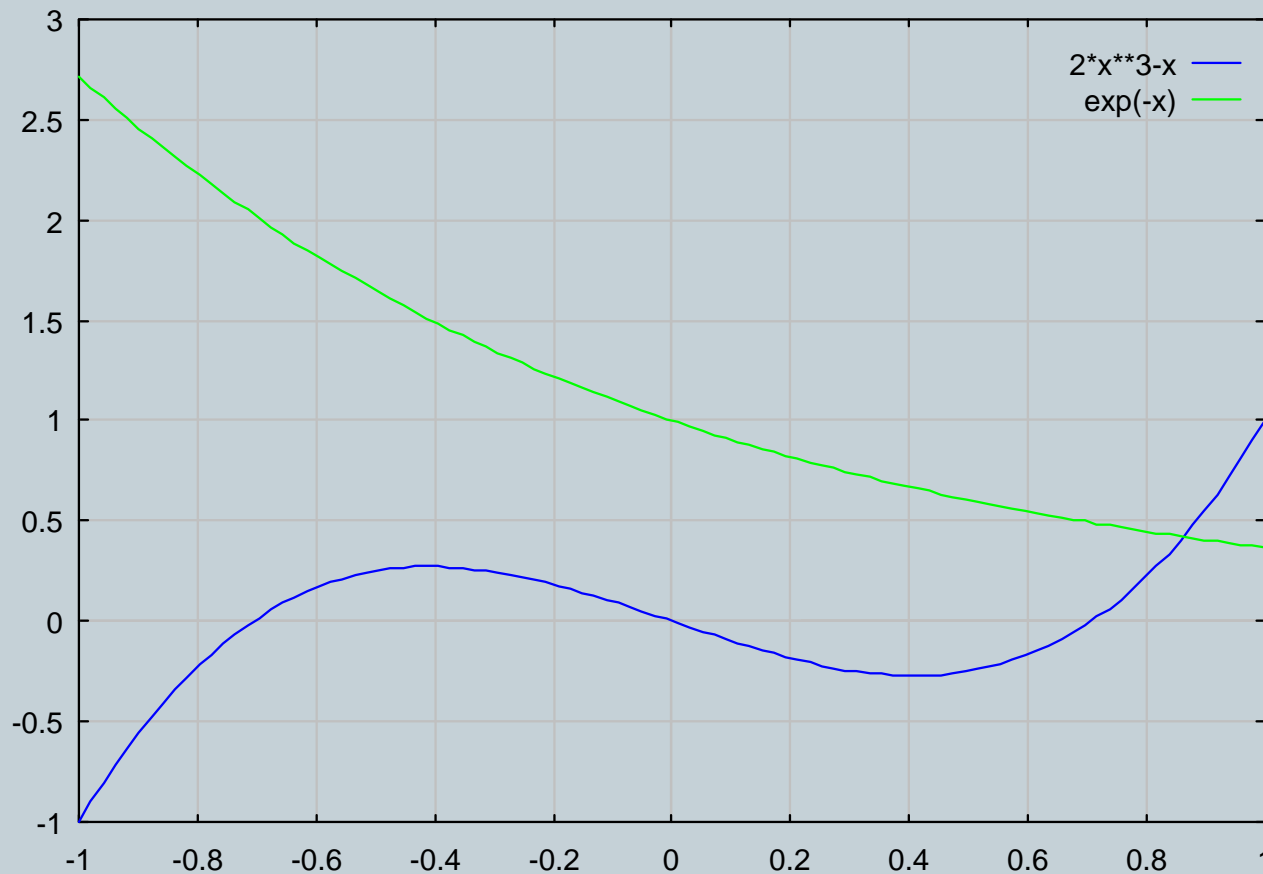
Maka fungsi persamaannya adalah $f(x)-g(x)$.

Contoh Menghitung Titik Potong 2 Kurva

11

Tentukan titik potong $y=2x^3-x$ dan $y=e^{-x}$

Perhatikan gambar kedua kurva tersebut sebagai berikut:



Dari gambar di atas terlihat akar terletak di antara 0.8 dan 1.

Contoh Menghitung Titik Potong 2 Kurva

12

Dengan menggunakan metode Secant, terlebih dahulu disusun fungsi dari persamaannya adalah sebagai berikut:

$$y=2x^3-x - e^{-x}$$

Pemakaian metode secant dengan titik pendekatan awal 0,8 dan 1 adalah sebagai berikut:

Pendekatan awal di $x_0 = 0.8$ dan $x_1 = 1$

Toleransi error = $1e-005$

i	x	f(x)
1	0.852558	-0.0395088
2	0.861231	-0.00628888
3	0.862873	8.36952e-005
4	0.862852	-1.73417e-007

Akar persamaan di $x = \mathbf{0.862852}$

Latihan Soal :

1. Tentukan nilai akar 27 dan akar 50
2. Sebuah sinyal DTMF mempunyai persamaan : $\sin(x)+\sin(2x)$.
Tentukan nilai maksimal dari sinyal tersebut untuk batas 0 s/d 3, menggunakan metode Secant.
3. Tentukan titik potong kurva $y = e^{-x}$ dengan $y=x^2$ untuk batas $[-1,1]$.
Gunakan metode Secant dan Newton Raphson. Bandingkan jumlah iterasi dan kesalahannya.
4. Gunakan metode Newton Raphson, Regula Falsi dan Secant untuk menghitung akar dari 10. Bandingkan jumlah iterasi dan kesalahannya. Buat kesimpulan.
5. Tentukan nilai puncak pada kurva $y=x^2+e^{-2x}\sin(x)$ pada range $x=[0,10]$
6. Hitung nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$