

Penyelesaian Persamaan Non Linier

1

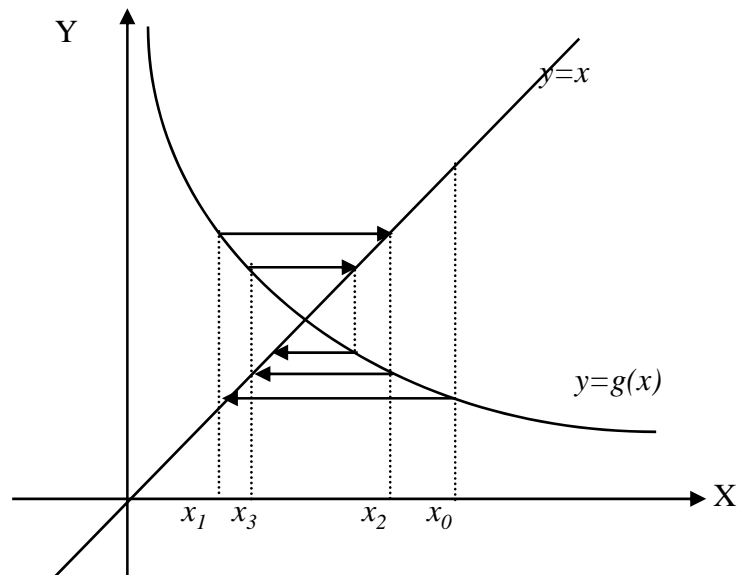
- Metode Iterasi Sederhana
- Metode Newton Raphson
- Permasalahan Titik Kritis pada Newton Raphson
- Metode Secant

- Metode Iterasi Sederhana-

Metode iterasi sederhana adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh : $x = g(x)$.

Contoh : $y=x-e^x$ diubah menjadi : $g(x)=e^x$

$g(x)$ inilah yang menjadi dasar iterasi pada metode iterasi sederhana
Metode iterasi sederhana secara grafis dijelaskan sebagai berikut :



Grafik Metode Iterasi Sederhana $y=x, g=e^x$

Contoh Penyelesaian Metode Iterasi Sederhana

3

Selesaikan $x + e^x - 0$

Jawab :

Persamaan diubah menjadi $g(x) = -e^x$

Ambil titik awal di $x_0 = -1$, maka

Iterasi 1 : $x = -e^{-1} = -0.3679$

$$F(x) = 0,3243 \Rightarrow x + e^x$$

Iterasi 2 : $x = -e^{-0,3679} = -0,6922$

$$F(x) = -0,19173$$

Iterasi 3 : $x = -e^{-0,6922} = -0,50047$

$$F(x) = 0,10577$$

Iterasi 4 : $x = -e^{-0,50047} = -0,60624$

$$F(x) = -0,06085$$

Iterasi 5 : $x = -e^{-0,60624} = -0,5454$

$$F(x) = 0,034217$$

Pada iterasi ke 10 diperoleh
 $x = -0,56843$ dan $F(x) = 0,034217$.

Algoritma Metode Iterasi Sederhana

4

1. Definisikan $F(x)$ dan $g(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan pendekatan awal x
4. Untuk iterasi = 1 s/d n atau $F(x) > e$
 $X_i = g(x_{i-1})$
Hitung $F(x_i)$
5. Akar adalah x terakhir yang diperoleh.

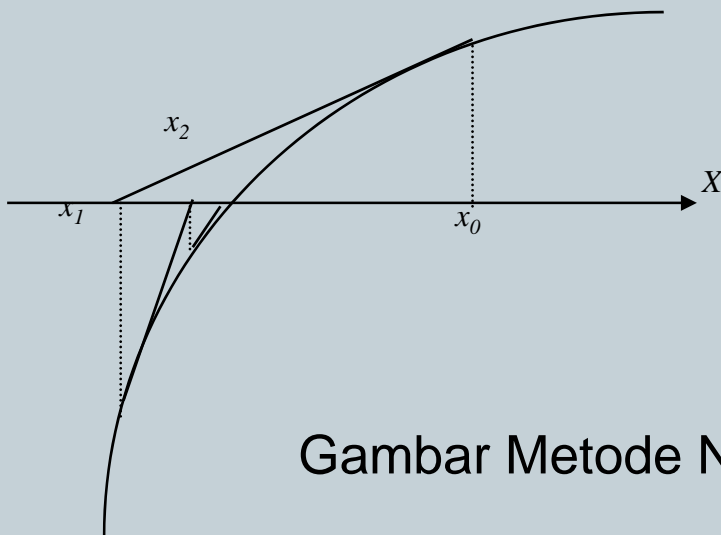
Metode Newton Raphson

5

Metode Newton Raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut.

Titik pendekatan ke $n+1$ dituliskan sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$



Gambar Metode Newton Raphson

Contoh Penyelesaian Metode Newton Raphson

Selesaikan persamaan $x - e^{-x} = 0$ dengan titik pendekatan awal $x_0 = 0$

$$f(x) = x - e^{-x} \rightarrow f'(x) = 1 + e^{-x}$$

$$f(x_0) = 0 - e^{-0} = -1$$

$$f'(x_0) = 1 + e^{-0} = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2} = 0,5$$

$$f(x_1) = -0,106631 \text{ dan } f'(x_1) = 1,60653$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,5 - \frac{-0,106531}{1,60653} = 0,566311$$

$$f(x_2) = -0,00130451 \text{ dan } f'(x_2) = 1,56762$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,566311 - \frac{-0,00130451}{1,56762} = 0,567143$$

$$f(x_3) = -1,96 \cdot 10^{-7}. \text{ Suatu bilangan yang sangat kecil.}$$

Sehingga akar persamaan $x = 0,567143$.

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0	-1	2
1	0.5	-0.106531	1.60653
2	0.566311	-0.00130451	1.56762
3	0.567143	-1.9648e-007	1.56714

Akar terletak di $x = 0.567143$

Toleransi error : 0.000001

Algoritma Metode Newton Raphson

7

1. Definisikan fungsi $F(x)$ dan $F'(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
4. Hitung $F(x_0)$ dan $F'(x_0)$
5. Untuk iterasi $i = 1$ s/d n atau $|f(x_i)| > e$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}$$

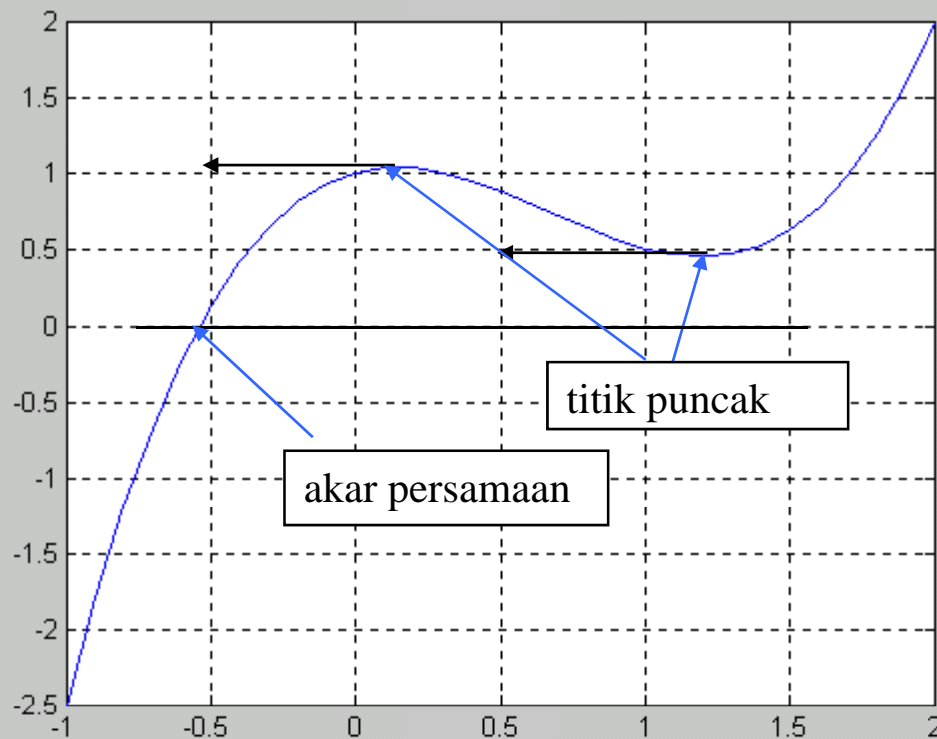
Hitung $f(x_{i+1})$ dan $f'(x_{i+1})$

6. Akar persamaan adalah nilai x_{i+1} yang terakhir diperoleh.

Permasalahan Metode NewtonRaphson

8

Metode ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai $F'(x) = 0$ sehingga nilai penyebut dari $\frac{F(x)}{F'(x)} = \text{not}$, secara grafis dapat dilihat sebagai berikut :



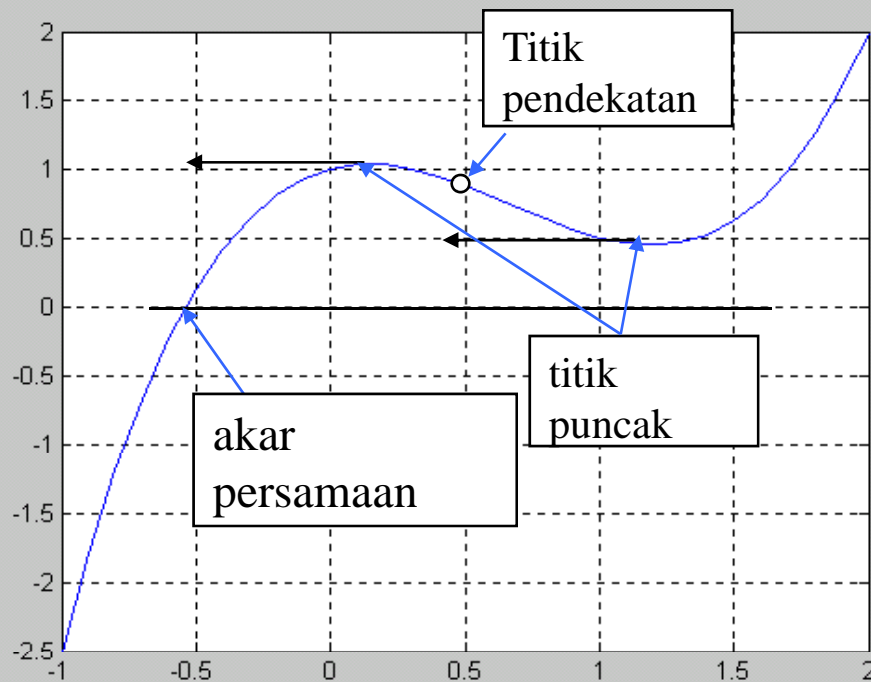
Bila titik pendekatan berada pada titik puncak, maka titik selanjutnya akan berada di tak berhingga.

Grafik Pendekatan Newton Raphson, dg. Titik Pendekatan ada di Titik Puncak

Permasalahan Metode NewtonRaphson

9

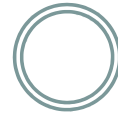
Metode ini menjadi sulit atau lama mendapatkan penyelesaian ketika titik pendekatannya berada di antara dua titik stasioner.



Bila titik pendekatan berada diantara dua titik puncak akan dapat mengakibatkan hilangnya penyelesaian (*divergensi*). Hal ini disebabkan titik selanjutnya berada pada salah satu titik puncak atau arah pendekatannya berbeda.

Grafik Pendekatan Newton Raphson, dg.
Titik pendekatan berada diantara 2 titik puncak

Penyelesaian Permasalahan Metode Newton Raphson



Untuk dapat menyelesaikan kedua permasalahan pada metode Newton Raphson ini, maka metode Newton Raphson perlu dimodifikasi dengan :

1. Bila titik pendekatan berada pada titik puncak maka titik pendekatan tersebut harus digeser sedikit, $x_i = x_i \pm \delta$ dimana δ adalah konstanta yang ditentukan dengan demikian $F'(x_i) \neq 0$ dan metode Newton Raphson tetap dapat berjalan.
2. Untuk menghindari titik-titik pendekatan yang berada jauh, sebaiknya pemakaian metode Newton Raphson ini didahului oleh metode tabel, sehingga dapat dijamin konvergensi dari metode Newton Raphson.

Contoh Penyelesaian Permasalahan Metode Newton Raphson

11

Selesaikan persamaan : $x \cdot e^{-x} + \cos(2x) = 0$

Jawab :

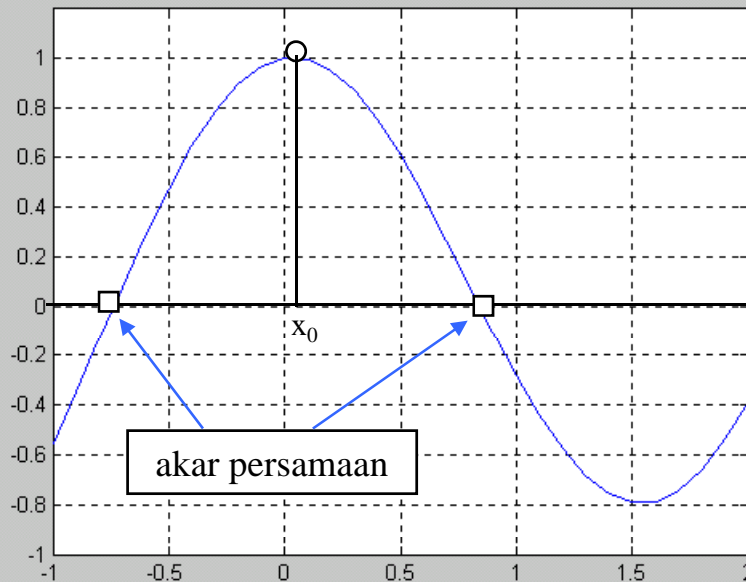
Bila menggunakan titik pendekatan awal $x_0 = 0,176281$

$$f(x) = x \cdot e^{-x} + \cos(2x)$$

$$f'(x) = (1-x) e^{-x} - 2 \sin(2x)$$

Sehingga $f(x_0) = 1,086282$ dan $f'(x_0) = -0,000015$

Grafik $y=x \cdot e^{-x} + \cos(2x)$



Iterasi menggunakan metode Newton Raphson :

iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,17628	1,086282	-1,52216E-05
1	71364,89	0,594134	-1,608732696
2	71365,26	-0,10227	-1,989513691
3	71365,2	0,00036	-1,99999987
4	71365,2	-2,9E-11	-2
5	71365,2	3,13E-13	-2
6	71365,2	3,13E-13	-2

Akar yang ditemukan
 $x=71365$

Pendekatan awal $x_0=0.5$
 iterasi dari metode Newton Raphson:

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,5	0,843568	-1,37967664
1	1,111424	-0,24106	-1,626349133
2	0,963203	0,019463	-1,86082504
3	0,973662	5,61E-05	-1,849946271
4	0,973692	4,98E-10	-1,849913417
5	0,973692	0	-1,849913417
6	0,973692	0	-1,849913417

Akar yang ditemukan adalah $x=0.973692$

Algoritma Metode Newton Raphson dengan Modifikasi Tabel

13

1. Definisikan fungsi $F(x)$
2. Ambil range nilai $x = [a, b]$ dengan jumlah pembagi n
3. Masukkan toleransi error (e) dan masukkan iterasi n
4. Gunakan algoritma tabel diperoleh titik pendekatan awal x_0 dari :
 $F(x_k) \cdot F(x_{k+1}) < 0$ maka $x_0 = x_k$
5. Hitung $F(x_0)$ dan $F'(x_0)$
6. Bila $F[abs(F'(x_0))] < e$ maka pendekatan awal x_0 digeser sebesar dx (dimasukkan)

$$x_0 = x_0 + dx$$

hitung $F(x_0)$ dan $F'(x_0)$

7. Untuk iterasi $i = 1$ s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F'(x_{i-1})}$$

hitung $F(x_i)$ dan $F'(x_i)$

bila $|F'(x_i)| < e$ maka

$$x_i = x_i + dx$$

hitung $F(x_i)$ dan $F'(x_i)$

8. Akar persamaan adalah x terakhir yang diperoleh.

Metode Secant

Metode Secant merupakan perbaikan dari metode regula-falsi dan Newton Raphson, dimana kemiringan dua titik dinyatakan secara diskrit, dengan mengambil bentuk garis lurus yang melalui satu titik.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Dimana m diperoleh dari
$$m_n = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1}))}{(x_n - x_{n-1})}$$

Jika $y=F(x)$, n_y dan x_n diketahui, maka titik ke $n+1$ adalah :

$$y_{n+1} - y_n = m_n(x_{n+1} - x_n)$$

Bila titik x_{n+1} dianggap sebagai akar persamaan maka $y_{n+1} = 0$ sehingga

$$x_{n+1} = x_n - y_n \frac{(x_n - x_{n+1})}{y_n - y_{n+1}}$$

Contoh Penyelesaian Metode Secant

Selesaikan persamaan $x^2 - (x + 1).e^{-x}$

Jawab :

Berdasarkan gambar grafik didapatkan akar terletak pada range [0.8, 0.9], maka $x_0 = 0.8$ dan $x_1 = 0.9$, sehingga :

$$y_0 = F(x_0) = -0.16879$$

$$y_1 = F(x_1) = 0.037518$$

Iterasi Metode Secant adalah sbb :

Iterasi 1 :

$$x_2 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 0.881815 \quad y_2 = 0.00153$$

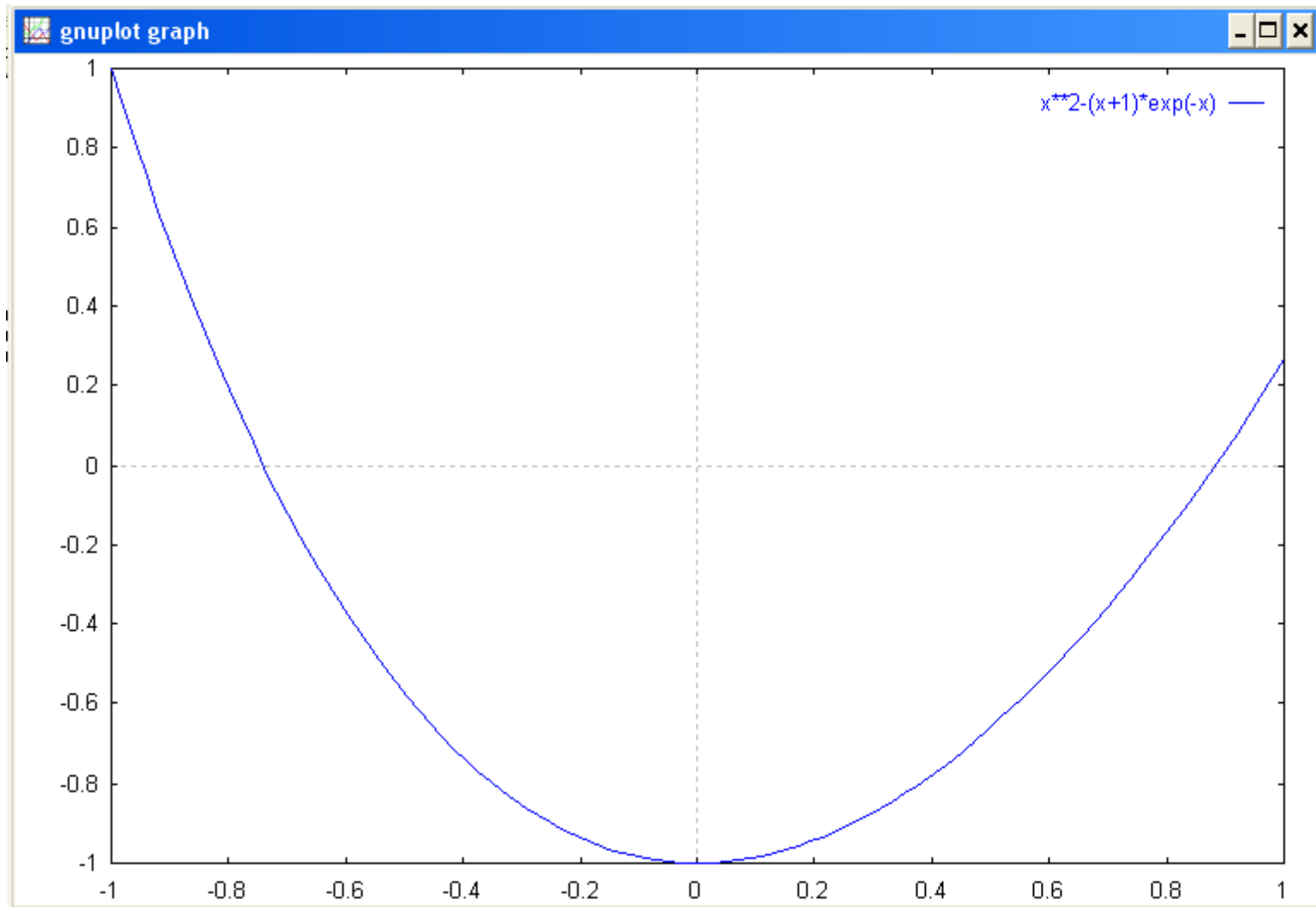
Iterasi 2 :

$$x_3 = x_2 - y_2 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0.882528 \quad y_3 = 1.3 \times 10^{-5}$$

Iterasi 3 :

$$x_4 = x_3 - y_3 \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = 0.882534 \quad y_4 = 4.91 \times 10^{-9}$$

Diperoleh akar $x = \mathbf{0.882534}$



Grafik fungsi $y = x^2 - (x+1).e^{-x}$ untuk range $[-1,1]$

Algoritma Metode Secant

1. Definisikan fungsi $F(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Masukkan dua nilai pendekatan awal, dimana diantaranya terdapat akar (x_0 dan x_1), gunakan metode tabel atau grafis untuk mendapatkan titik pendekatan
4. Hitung $F(x_0)$ dan $F(x_1)$ sebagai y_0 dan y_1
5. Untuk iterasi $i = 1$ s/d n atau $|f(x_i)| > e$

$$x_{i+1} = x_i - y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

Hitung $y_{i+1} = f(x_{i+1})$

6. Akar persamaan adalah nilai x yang terakhir diperoleh.