

Penyelesaian Persamaan Non Linier

1

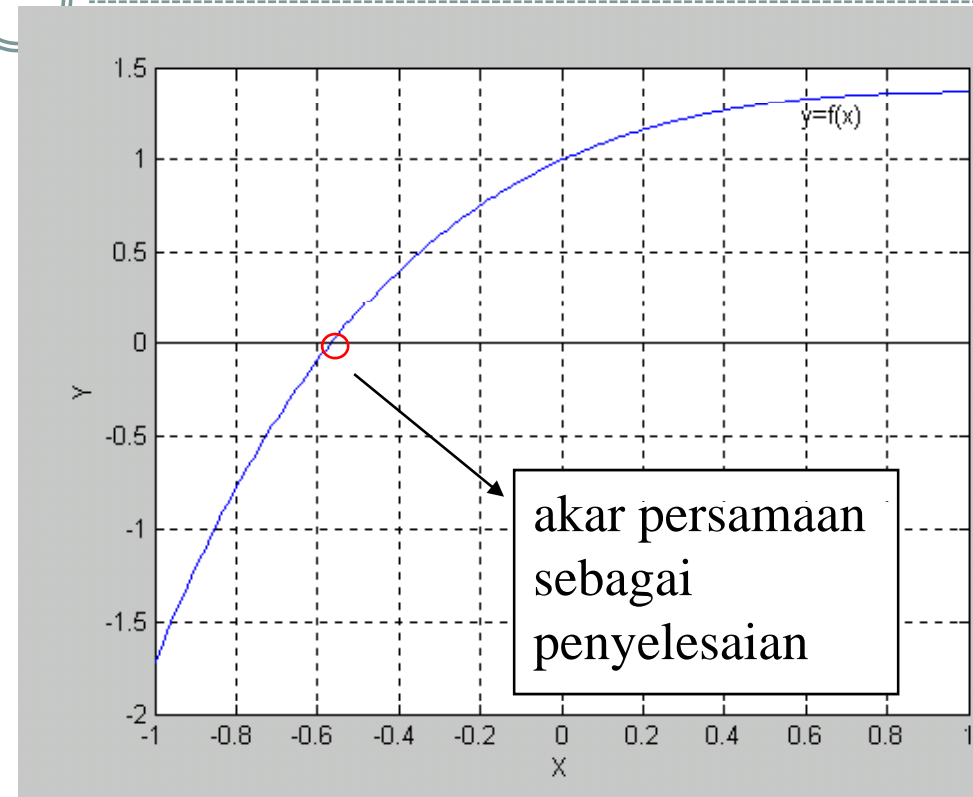
- Pengantar Penyelesaian Pers. Non Linier
- Metode Tabel
- Metode Biseksi
- Metode Regula Falsi

Muhammad Zen S. Hadi, ST. MSc.

Pengantar

Penyelesaian Persamaan Non Linier

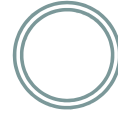
- Penyelesaian persamaan non linier adalah penentuan akar-akar persamaan non linier.
- Akar sebuah persamaan $f(x) = 0$ adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan nol.
- Akar persamaan $f(x)$ adalah titik potong antara kurva $f(x)$ dan sumbu X .



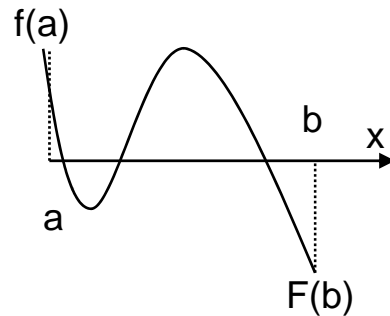
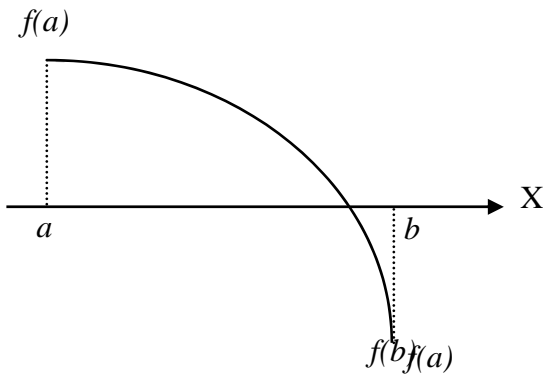
Contoh Kurva $y = xe^{-x} + 1$

*Titik potong kurva dengan sb x ada diantara $x = -0.5$ dan $x = -0.6$,
Sehingga akar atau penyelesaian pers. $Y = xe^{-x} + 1$ juga berada di $x = -0.5$
dan $x = -0.6$*

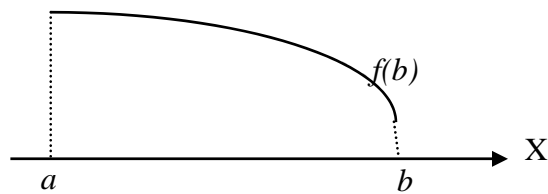
Teorema Penyelesaian Persamaan Non Linier



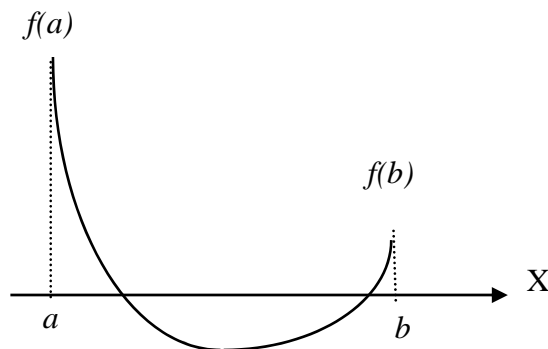
- Suatu range $x=[a,b]$ mempunyai akar bila $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda atau memenuhi $f(a).f(b)<0$.



Karena $f(a).f(b)<0$ maka pada range $x=[a,b]$ terdapat akar sebanyak bilangan ganjil



Karena $f(a).f(b)>0$ maka pada range $x=[a,b]$ tidak dapat dikatakan terdapat akar.



Atau jika $f(a).f(b)>0$ maka pada range $x=[a,b]$ terdapat akar sebanyak bilangan genap

Penyelesaian Pers. Non Linier

Metode Tabel

Metode Tabel atau Metode Pembagian Area, dimana untuk $x = [a, b]$ atau x di antara a dan b dibagi sebanyak N bagian dan pada masing-masing bagian dihitung nilai $f(x)$ sehingga diperoleh tabel :

x	$f(x)$
$x_0=a$	$f(a)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
...	...
$x_n=b$	$f(b)$

- Dari tabel bila didapatkan $f(x_k)=0$ atau mendekati 0 maka dikatakan bahwa x_k adalah penyelesaian persamaan $f(x_k) = 0$.
- Bila tidak ada $f(x_k)$ yang $=0$, maka dicari nilai $f(x_k)$ dan $f(x_{k+1})$ yang berlawanan tanda bila tidak ditemukan maka dikatakan tidak mempunyai akar untuk $x = [a, b]$,

Dua pendapat untuk menentukan perkiraan akar :

1. Akar persamaan ditentukan oleh nilai mana yang lebih dekat, bila $|f(x_k)| < |f(x_{k+1})|$ maka akarnya x_k , dan bila $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ maka akarnya x_{k+1} .
2. Akarnya perlu di cari lagi, dengan range $x = [x_k, x_{k+1}]$

Contoh Penyelesaian Pers. Non Linier - Metode Tabel -

5

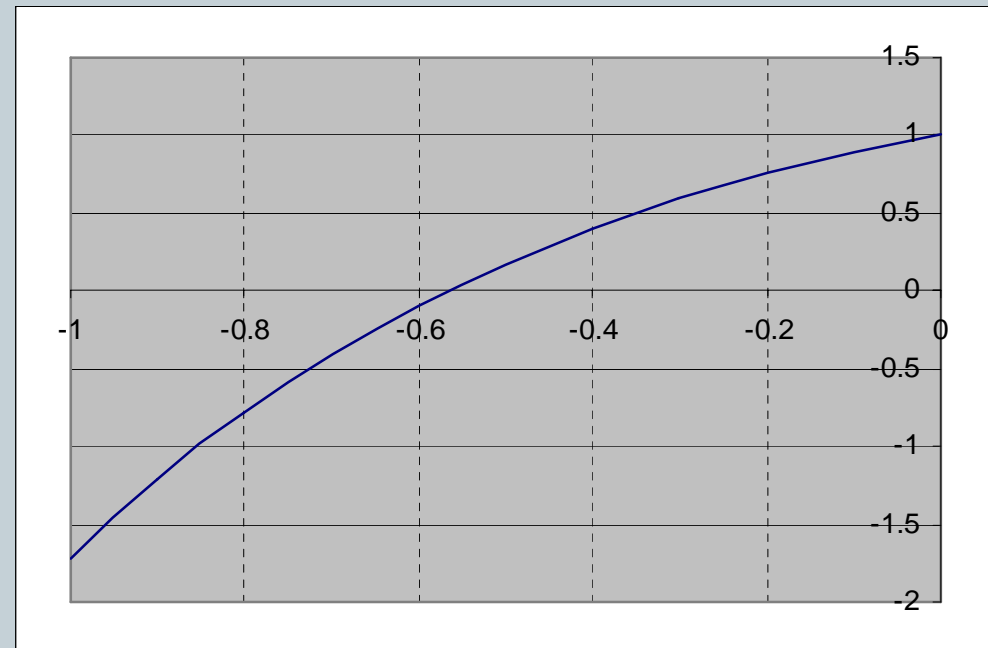
Selesaikan persamaan : $1+xe^{-x} = 0$ dengan range $x = [-1,0]$ jumlah pembagi 10

Jawab :

- Hitung step x mulai dari 0 s/d (-1) / 10 $\rightarrow N= 0.1$
- Dapatkan nilai $f(x)$ dimulai dari $x=-1$ dg. perubahan $x=0.1$ s/d $x=0$

x	f(x)
-1.0	-1,7183
-0.9	-1,2136
-0.8	-0,7804
-0.7	-0,4096
-0.6	-0,0933
-0.5	0,1756
-0.4	0,4033

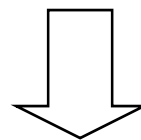
x	f(x)
-0.3	0,5950
-0.2	0,7557
-0.1	0,8895
0	1,00000



Grafik $y=xe^{-x}+1$ dgn range $x=[-1 0]$

- Dari tabel diperoleh hasil bahwa perubahan tanda $f(x)$ terdapat di $x=-0.6$ dan $x=-0.5$ dengan nilai $f(x)= -0.0933$ dan 0.1756 .
Sehingga disimpulkan akar ada di $x--0.6$ (karena % error untuk $f(x)$ nya lebih kecil daripada di $x=-0.5$)
- ✓ Bila pada range $x = [-0,6,-0,5]$ dibagi lagi dengan 10, maka diperoleh $f(x)$ yang terdekat dengan nol pada $x = -0,57$ dengan $f(x) = 0,00797$

x	f(x)
-0,60	-0,09327
-0,59	-0,06435
-0,58	-0,03590
-0,57	-0,00791
-0,56	0,01962
-0,55	0,04671
-0,54	0,07336
-0,53	0,09957
-0,52	0,12535
-0,51	0,15070
-0,50	0,17564



Nilai lebih PRECISI

Penyelesaian Pers. Non Linier

Algoritma dan Resume Metode Tabel

7

Algoritma Metode Tabel :

- (1) Definisikan fungsi $f(x)$
- (2) Tentukan range untuk x yang berupa batas bawah x_{bawah} dan batas atas x_{atas} .
- (3) Tentukan jumlah pembagian N
- (4) Hitung step pembagi h ; $h = \frac{x_{atas} - x_{bawah}}{N}$
- (5) Untuk $i = 0$ s/d N , hitung
 $x_i = x_{bawah} + i.h$ $y_i = f(x_i)$
- (6) Untuk $i = 0$ s/d N dicari k dimana
 - *. Bila $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah penyelesaian
 - *. Bila $f(x_k).f(x_{k+1}) < 0$ maka :
 - a. Bila $|f(x_k)| < |f(x_{k+1})|$ maka x_k adalah penyelesaian
 - b. Bila tidak x_{k+1} adalah penyelesaian atau dapat dikatakan penyelesaian berada di antara x_k dan x_{k+1} .

- *Metode table ini secara umum sulit mendapatkan penyelesaian dengan error yang kecil,*
- *Tetapi metode ini digunakan sebagai taksiran awal mengetahui area penyelesaian yang benar sebelum menggunakan metode yang lebih baik dalam menentukan penyelesaian.*

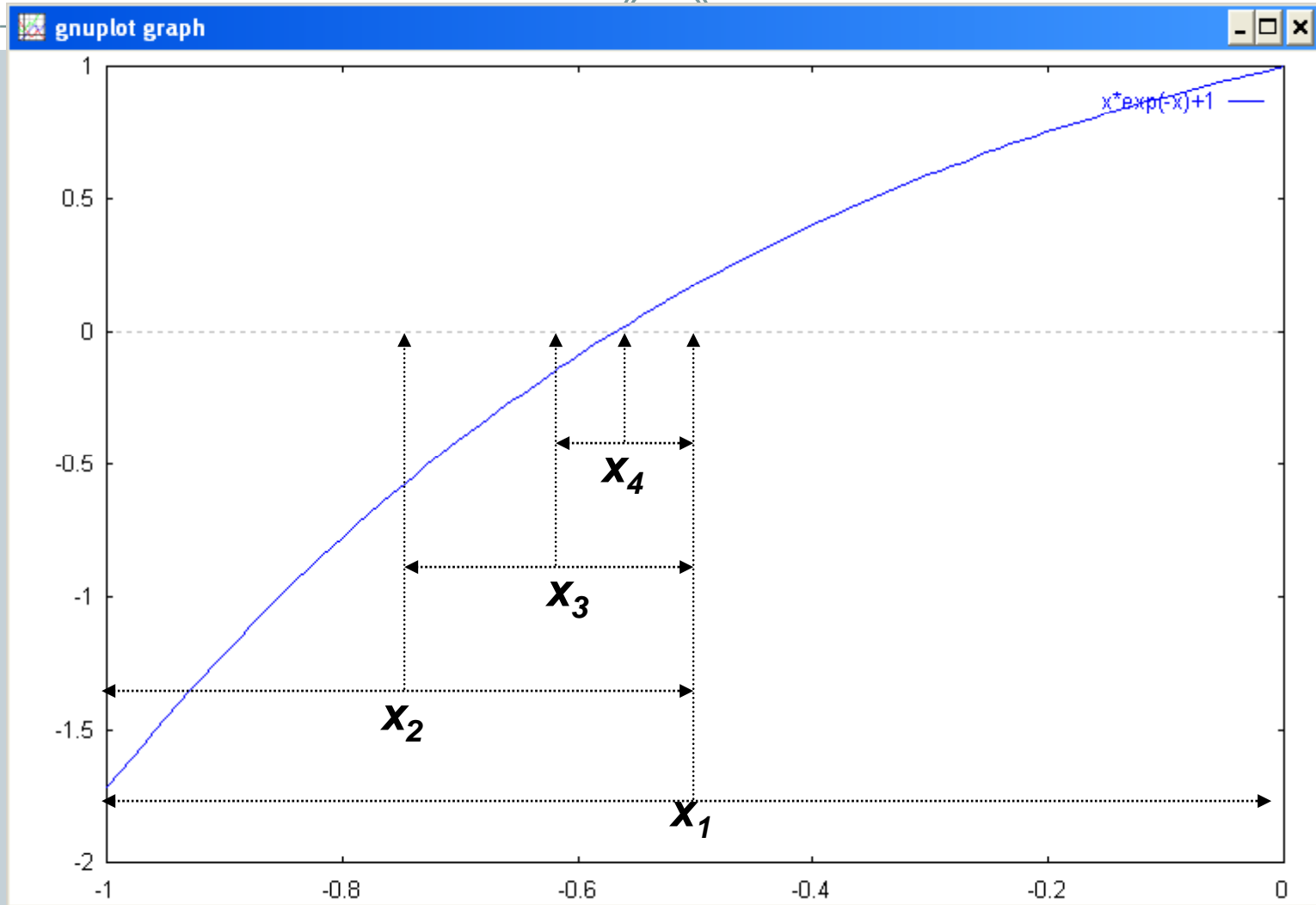
Penyelesaian Pers. Non Linier

Metode Biseksi

8

- Metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung akar dan bagian yang tdk mengandung akar dibuang. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.
- Untuk menggunakan metode biseksi, tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b). Kemudian dihitung nilai tengah : $x = \frac{a + b}{2}$
- Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar :
 - $f(a) \cdot f(x) < 0$, maka $b=x$, $f(b)=f(x)$, a tetap
 - $f(a) \cdot f(x) > 0$, maka $a=x$, $f(a)=f(x)$, b tetap
- Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah & batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yg mempunyai akar.

Grafik Metode Biseksi



Gambar Grafik Metode Biseksi $y=1 + x e^{-x}$ dengan range $[-1,0]$

Penyelesaian Pers. Non Linier

Metode Biseksi

Selesaikan persamaan $1+xe^{-x}=0$ dengan menggunakan range $x= [-1,0]$

i	a	b	x	f(x)	f(a)	Ket
1	-1	0	-0.5	0.175639	-1.71828	Berlawanan tanda
2	-1	-0.5	-0.75	-0.58775	-1.71828	
3	-0.75	-0.5	-0.625	-0.16765	-0.58775	
4	-0.625	-0.5	-0.5625	0.012782	-0.16765	Berlawanan tanda
5	-0.625	-0.5625	-0.59375	-0.07514	-0.16765	
6	-0.59375	-0.5625	-0.57813	-0.03062	-0.07514	
7	-0.57813	-0.5625	-0.57031	-0.00878	-0.03062	
8	-0.57031	-0.5625	-0.56641	0.002035	-0.00878	Berlawanan tanda
9	-0.57031	-0.56641	-0.56836	-0.00336	-0.00878	
10	0.56836	-0.56641	-0.56738	-0.000066	-0.00336	

Pada iterasi ke-10 diperoleh $x=-0.56738$ dan $f(x)=-0.00066$.

Penyelesaian Pers. Non Linier

Algoritma dan Resume Metode Biseksi

11

Algoritma Metode Biseksi

1. Definisikan fungsi $f(x)$ yang akan dicari akarnya
2. Tentukan nilai a dan b
3. Tentukan toleransi e dan iterasi maksimum N
4. Hitung $f(a)$ dan $f(b)$
5. Jika $f(a).f(b) > 0$ maka proses dihentikan karena tidak ada akar, bila tidak dilanjutkan
6. Hitung $x = \frac{a+b}{2}$ Hitung $f(x)$
7. Bila $f(x).f(a) < 0$ maka $b=x$ dan $f(b)=f(x)$, bila tidak $a=x$ dan $f(a)=f(x)$
8. Jika $|b-a| < e$ atau $|f(x)| < e$ atau iterasi $>$ iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar = x , dan bila tidak, ulangi langkah 6.

Metode biseksi dengan toleransi error 0.001 dibutuhkan 10 iterasi, semakin teliti (kecil toleransi errornya) maka semakin besar jumlahnya

Penyelesaian Pers. Non Linier

Metode Regula Falsi

12

Metode regula falsi adalah metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas range, metode ini bekerja secara iterasi dengan melakukan update range.

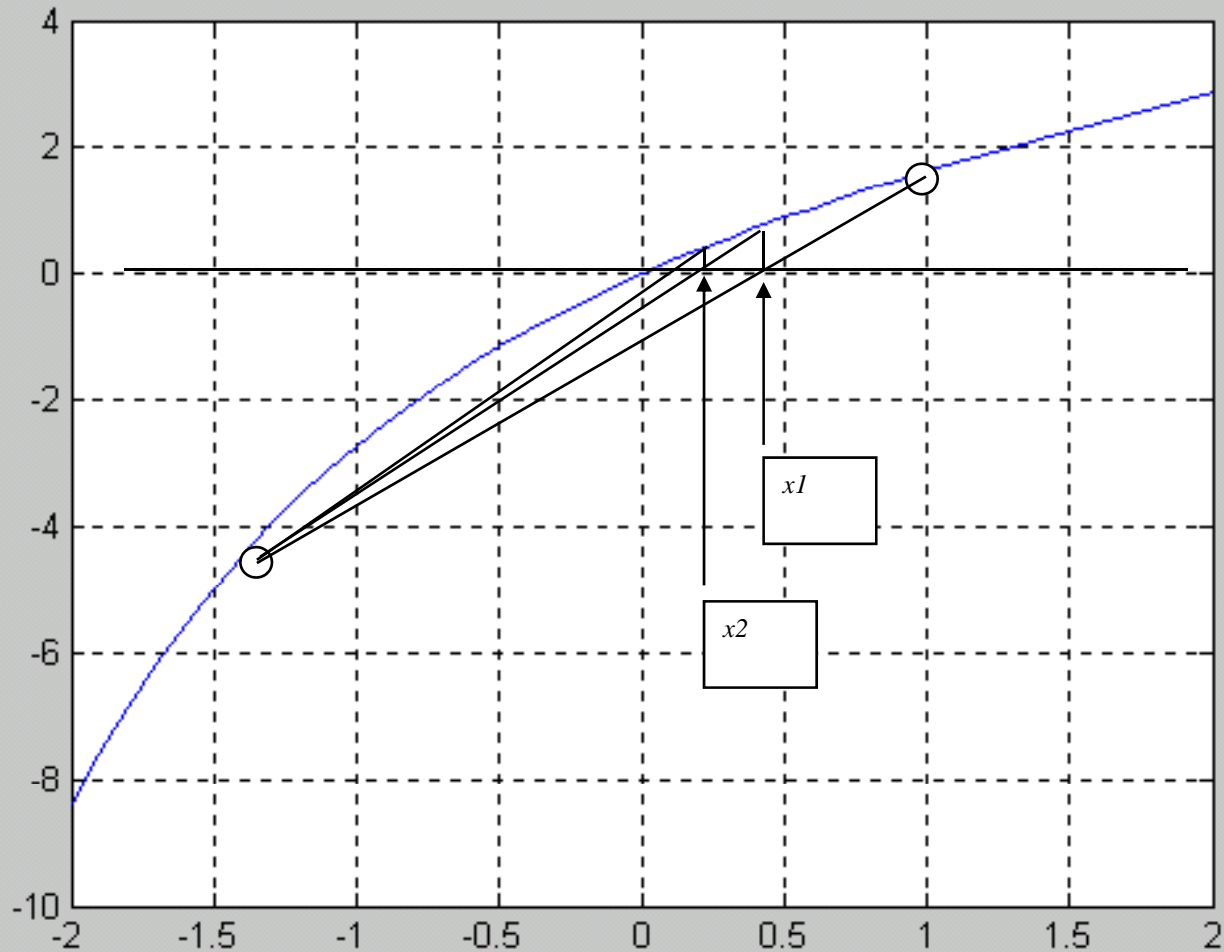
Titik pendekatan yang digunakan oleh metode regula-falsi adalah :

$$X = \frac{f(b).a - f(a).b}{f(b) - f(a)}$$

Penyelesaian Pers. Non Linier

Grafik Metode Regula Falsi

13



Penyelesaian Pers. Non Linier

Contoh Metode Regula Falsi

Selesaikan persamaan $1+xe^{-x}=0$ dengan menggunakan range $x= [-1,0]$

i	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
1	-1	0	-0.36788	0.468536	-1.71828	1
2	-1	-0.36788	0.074805	1.069413	-1.71828	0.468536
3	
14	-0.57195	0.412775	-0.5703	-0.00874	-0.01333	1.273179
15	-0.5703	0.412775	-0.56922	-0.00576	-0.00874	1.273179
16	-0.56922	0.412775	-0.56852	-0.00381	-0.00576	1.273179
17	-0.56852	0.412775	-0.56806	-0.00252	-0.00381	1.273179
18	-0.56806	0.412775	-0.56775	-0.00167	-0.00252	1.273179
19	-0.56775	0.412775	-0.56755	-0.00111	-0.00167	1.273179
20	-0.56755	0.412775	-0.56741	-0.00074	-0.00111	1.273179

Akar persamaan di $x=-0.56741$ dengan kesalahan = 0.00074

Penyelesaian Pers. Non Linier

Algoritma Metode Regula Falsi

15

Algoritma Metode Regula Falsi

1. definisikan fungsi $f(x)$
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)
3. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
4. Hitung $Fa = f(a)$ dan $Fb = f(b)$
5. Untuk iterasi $I = 1$ s/d n atau error $> e$
6. $x = \frac{Fb \cdot a - Fa \cdot b}{Fb - Fa}$ Hitung $Fx = f(x)$
7. Jika $Fx \cdot Fa < 0$ maka $b = x$ dan $Fb = Fx$ jika tidak $a = x$ dan $Fa = Fx$.
8. Jika $|f(x)| < e$ atau iterasi $>$ iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar $= x$, dan bila tidak, ulangi langkah 6.